

Momenty wychowawcze

ISSN 2072-0297

МОЛОДОЙ

# учёный

международный научный журнал

Król

Maciuś Pierwszy

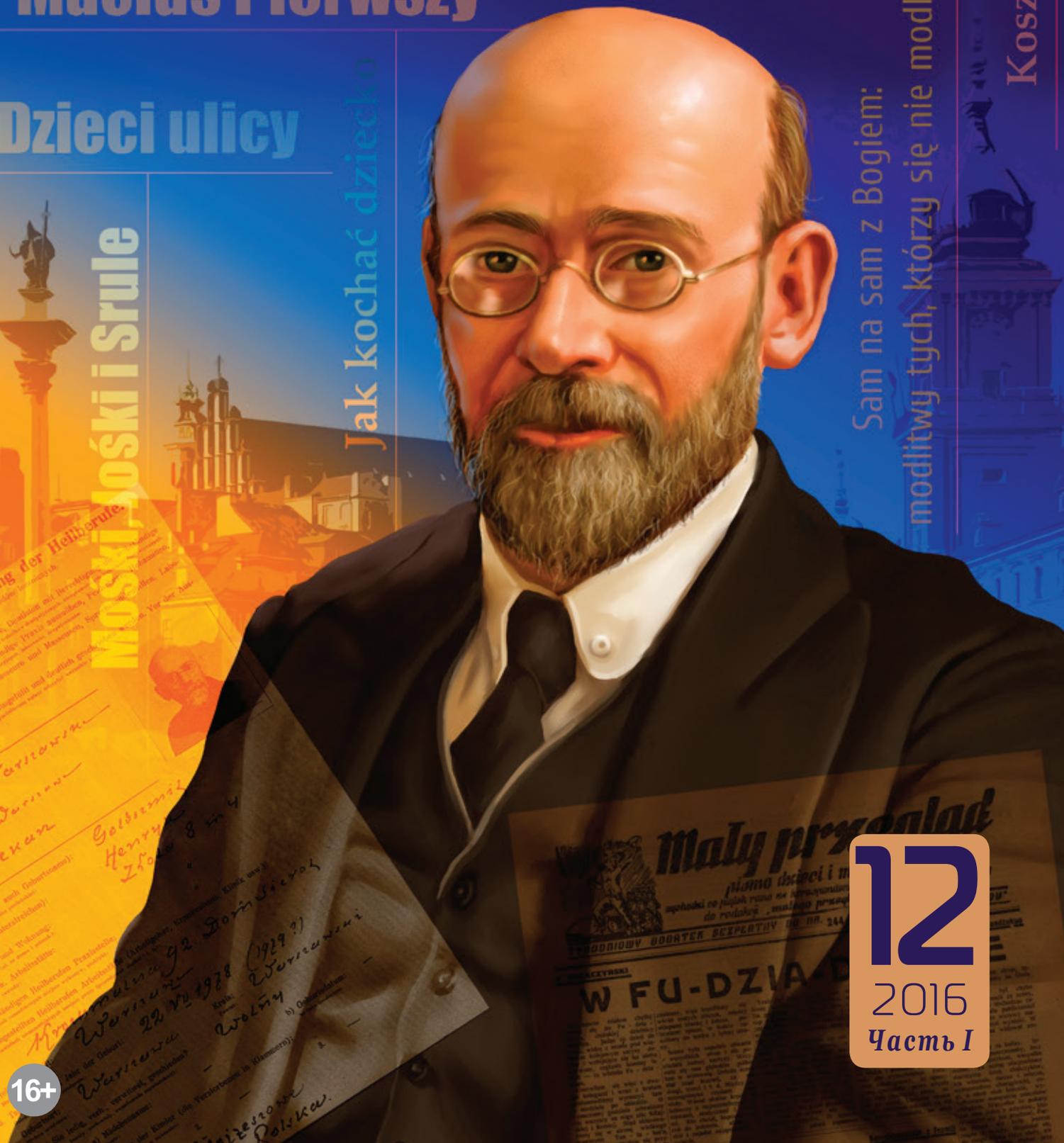
Dzieci ulicy

Moski Joški i Srule

Jak kochać dziecko

Sam na sam z Bogiem:  
modlitwy tych, którzy się nie modlą

Koszałki-Opałki



16+

12  
2016  
Часть I



ISSN 2072-0297

# Молодой учёный

Международный научный журнал

Выходит два раза в месяц

№ 12 (116) / 2016

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**Главный редактор:** Ахметов Ильдар Геннадьевич, кандидат технических наук

**Члены редакционной коллегии:**

Ахметова Мария Николаевна, доктор педагогических наук

Иванова Юлия Валентиновна, доктор философских наук

Каленский Александр Васильевич, доктор физико-математических наук

Куташов Вячеслав Анатольевич, доктор медицинских наук

Лактионов Константин Станиславович, доктор биологических наук

Сараева Надежда Михайловна, доктор психологических наук

Абдрасилов Турганбай Курманбаевич, доктор философии (PhD) по философским наукам

Авдеюк Оксана Алексеевна, кандидат технических наук

Айдаров Оразхан Турсункожаевич, кандидат географических наук

Алиева Тарана Ибрагим кызы, кандидат химических наук

Ахметова Валерия Валерьевна, кандидат медицинских наук

Брезгин Вячеслав Сергеевич, кандидат экономических наук

Данилов Олег Евгеньевич, кандидат педагогических наук

Дёмин Александр Викторович, кандидат биологических наук

Дядюн Кристина Владимировна, кандидат юридических наук

Желнова Кристина Владимировна, кандидат экономических наук

Жуйкова Тамара Павловна, кандидат педагогических наук

Жураев Хусниддин Олтинбоевич, кандидат педагогических наук

Игнатова Мария Александровна, кандидат искусствоведения

Калдыбай Кайнар Калдыбайулы, доктор философии (PhD) по философским наукам

Кенесов Асхат Алмасович, кандидат политических наук

Коварда Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук

Комогорцев Максим Геннадьевич, кандидат технических наук

Котляров Алексей Васильевич, кандидат геолого-минералогических наук

Кузьмина Виолетта Михайловна, кандидат исторических наук, кандидат психологических наук

Кучерявенко Светлана Алексеевна, кандидат экономических наук

Лескова Екатерина Викторовна, кандидат физико-математических наук

Макеева Ирина Александровна, кандидат педагогических наук

Матвиенко Евгений Владимирович, кандидат биологических наук

Матроскина Татьяна Викторовна, кандидат экономических наук

Матусевич Марина Степановна, кандидат педагогических наук

Мусаева Ума Алиевна, кандидат технических наук

Насимов Мурат Орленбаевич, кандидат политических наук

Паридинова Ботагоз Жаппаровна, магистр философии

Прончев Геннадий Борисович, кандидат физико-математических наук

Семахин Андрей Михайлович, кандидат технических наук

Сенцов Аркадий Эдуардович, кандидат политических наук

Сенюшкин Николай Сергеевич, кандидат технических наук

Титова Елена Ивановна, кандидат педагогических наук

Ткаченко Ирина Георгиевна, кандидат филологических наук

Фозилов Садриддин Файзуллаевич, кандидат химических наук

Яхина Асия Сергеевна, кандидат технических наук

Ячинова Светлана Николаевна, кандидат педагогических наук

На обложке изображен Януш Корчак (1878–1942) — выдающийся польский педагог, писатель, врач и общественный деятель.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-38059 от 11 ноября 2009 г.**

Журнал входит в систему РИНЦ (Российский индекс научного цитирования) на платформе elibrary.ru.

Журнал включен в международный каталог периодических изданий «Ulrich's Periodicals Directory».

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются. За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов. При перепечатке ссылка на журнал обязательна.

#### **Международный редакционный совет:**

Айрян Заруи Геворковна, *кандидат филологических наук, доцент (Армения)*

Арошидзе Паата Леонидович, *доктор экономических наук, ассоциированный профессор (Грузия)*

Атаев Загир Вагитович, *кандидат географических наук, профессор (Россия)*

Ахмеденов Кажмурат Максutowич, *кандидат географических наук, ассоциированный профессор (Казахстан)*

Бидова Бэла Бертовна, *доктор юридических наук, доцент (Россия)*

Борисов Вячеслав Викторович, *доктор педагогических наук, профессор (Украина)*

Велковска Гена Цветкова, *доктор экономических наук, доцент (Болгария)*

Гайич Тамара, *доктор экономических наук (Сербия)*

Данатаров Агахан, *кандидат технических наук (Туркменистан)*

Данилов Александр Максимович, *доктор технических наук, профессор (Россия)*

Демидов Алексей Александрович, *доктор медицинских наук, профессор (Россия)*

Досманбетова Зейнегуль Рамазановна, *доктор философии (PhD) по филологическим наукам (Казахстан)*

Ешиев Абдыракман Молдоалиевич, *доктор медицинских наук, доцент, зав. отделением (Кыргызстан)*

Жолдошев Сапарбай Тезекбаевич, *доктор медицинских наук, профессор (Кыргызстан)*

Игисинов Нурбек Сагинбекович, *доктор медицинских наук, профессор (Казахстан)*

Кадыров Кутлуг-Бек Бекмурадович, *кандидат педагогических наук, заместитель директора (Узбекистан)*

Кайгородов Иван Борисович, *кандидат физико-математических наук (Бразилия)*

Каленский Александр Васильевич, *доктор физико-математических наук, профессор (Россия)*

Козырева Ольга Анатольевна, *кандидат педагогических наук, доцент (Россия)*

Колпак Евгений Петрович, *доктор физико-математических наук, профессор (Россия)*

Куташов Вячеслав Анатольевич, *доктор медицинских наук, профессор (Россия)*

Лю Цзюань, *доктор филологических наук, профессор (Китай)*

Малес Людмила Владимировна, *доктор социологических наук, доцент (Украина)*

Нагервадзе Марина Алиевна, *доктор биологических наук, профессор (Грузия)*

Нурмамедли Фазиль Алигусейн оглы, *кандидат геолого-минералогических наук (Азербайджан)*

Прокопьев Николай Яковлевич, *доктор медицинских наук, профессор (Россия)*

Прокофьева Марина Анатольевна, *кандидат педагогических наук, доцент (Казахстан)*

Рахматуллин Рафаэль Юсупович, *доктор философских наук, профессор (Россия)*

Ребезов Максим Борисович, *доктор сельскохозяйственных наук, профессор (Россия)*

Сорока Юлия Георгиевна, *доктор социологических наук, доцент (Украина)*

Узаков Гулом Норбоевич, *доктор технических наук, доцент (Узбекистан)*

Хоналиев Назарали Хоналиевич, *доктор экономических наук, старший научный сотрудник (Таджикистан)*

Хоссейни Амир, *доктор филологических наук (Иран)*

Шарипов Аскар Калиевич, *доктор экономических наук, доцент (Казахстан)*

**Руководитель редакционного отдела:** Кайнова Галина Анатольевна

**Ответственные редакторы:** Осянина Екатерина Игоревна, Вейса Людмила Николаевна

**Художник:** Шишков Евгений Анатольевич

**Верстка:** Бурьянов Павел Яковлевич, Голубцов Максим Владимирович, Майер Ольга Вячеславовна

Почтовый адрес редакции: 420126, г. Казань, ул. Амирхана, 10а, а/я 231.

Фактический адрес редакции: 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.

E-mail: info@moluch.ru; <http://www.moluch.ru/>.

Учредитель и издатель: ООО «Издательство Молодой ученый».

Тираж 500 экз. Дата выхода в свет: 15.07.2016. Цена свободная.

Материалы публикуются в авторской редакции. Все права защищены.

Отпечатано в типографии издательства «Молодой ученый», 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

<b>Авезов А. Х.</b> Некоторые численные результаты исследования трехмерных турбулентных струй реагирующих газов .....	1
<b>Авезов А. Х.</b> Выбор математической модели и исследования трехмерных турбулентных струй .....	2
<b>Алиев М. А.</b> Хроматические номера прямоугольников .....	3
<b>Бешимова Д. Р.</b> Слабо сепарабельные пространства .....	7
<b>Голубев Р. И., Медведев К. С., Лонягина Ю. Е.</b> Поиск равновесных решений в модели страхования .....	8
<b>Голубев Р. И., Чернышов Д. О., Медведев К. С.</b> Поиск оптимальных контрактов в модели добровольного страхования .....	12
<b>Заковряшин Е. М., Бурмистров В. Д.</b> Программная реализация одного класса многошаговых игр поиска .....	15
<b>Звягин Л. С.</b> Ключевые аспекты имитационного моделирования сложных систем .....	19
<b>Кабриц С. А., Еременко В. Р., Ма-ю-шан В. В., Ложкин Е. Н.</b> Расчет напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки по заданным перемещениям .....	23
<b>Кутлимурадов Д. С., Менглиев Д. Б.</b> Инновационный метод обучения высшей математике студентов, обучающихся по специальности «Информационные технологии» .....	28
<b>Маматова Н. Х., Норова М.</b> Решение задачи для нормы функционала погрешности интерполяционной формулы в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ .....	31
<b>Маркова Н. А.</b> Суперэйлеровость графов и стягиваемость .....	32
<b>Медведев К. С., Голубев Р. И.</b> Поиск допустимого управления в задаче стабилизации .....	38

<b>Меражова Ш. Б., Маматова Н. Х.</b> Априорная оценка для решения первой краевой задачи для уравнения смешанного типа .....	42
<b>Меражова Ш. Б.</b> Решение методом продолжения задач математической физики в полуограниченных областях .....	43
<b>Мирошниченко Н. М.</b> Один способ генерации графа .....	45
<b>Mukhitdinov R. T.</b> On a class of quasi-Volterra quadratic stochastic operators .....	47
<b>Никифорова А. А.</b> Формализация и анализ математической модели взаимодействия участников коррупционной сделки .....	48
<b>Нуриддинов Ж. З.</b> Система обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом .....	55
<b>Нуриддинов Ж. З.</b> Система дифференциальных уравнений с частными производными с запаздывающим аргументом .....	57
<b>Павлов Ю. Н., Майструк К. А.</b> Сравнение методов оценки тональности текста .....	59
<b>Расулов Т. Х., Тошева Н. А.</b> О спектре тензорной суммы интегральных операторов .....	64
<b>Худаяров С. С.</b> Нули определителя Фредгольма, соответствующие одной блочно-операторной матрице .....	66
<b>Шульгина-Тарашук А. С.</b> Решение транспортной задачи с помощью программного обеспечения .....	67
<b>Элмуродова Х. Б.</b> Кубический числовой образ на примерах .....	70

## ФИЗИКА

<b>Атаев В. В.</b> Спектроскопия импеданса пористого кремния и применение его в медицине .....	73
---	----

<b>Данилов О. Е.</b> Учебные компьютерные модели волновых процессов и явлений .....76	<b>Ибрагимов С. С.</b> Определение геометрических размеров теплицы и способы подбора материалов..... 105
<b>Емельянов А. А., Бесклеткин В. В., Прокопьев К. В., Ситенков А. А., Бурхацкий В. В., Мальцев Н. В., Авдеев А. С., Габзалилов Э. Ф.</b> Математическое моделирование САР скорости асинхронного двигателя с переменными $\Psi_R$ — $I_S$ в системе абсолютных единиц .....83	<b>Копп М. И.</b> Генерация крупномасштабных магнитных полей и вихревых структур во вращающейся электропроводящей самогравитирующей среде с мелкомасштабной неспиральной силой ..... 107
<b>Емельянов А. А., Бесклеткин В. В., Прокопьев К. В., Ситенков А. А., Бурхацкий В. В., Мальцев Н. В., Авдеев А. С., Габзалилов Э. Ф.</b> Математическое моделирование системы «АИН ШИМ — АД» с транзисторными ключами.....94	<b>Ма-ю-шан В. В., Еременко В. Р.</b> Методы подавления счетного шума при решении задач физики плазмы методами частиц ..... 121
<b>Ибрагимов С. С.</b> Проектирование двухскатной теплицы с эффективным использованием солнечного излучения ..... 103	<b>Смердов Р. С.</b> Оптические фильтры на основе наноструктур с квантовыми точками ..... 126
	<b>Юлдашев Д. О., Шукуров Г. Д.</b> Исследование гамма-переходов с энергиями 149.01 кэВ ядра $^{153}\text{Tb}$ ..... 131
	<b>Юлдашев Д. О., Шукуров Г. Д.</b> Исследование гамма-переходов с энергией 254.3 кэВ ядра $^{153}\text{Tb}$ ..... 134



# МАТЕМАТИКА

## Некоторые численные результаты исследования трехмерных турбулентных струй реагирующих газов

Авезов Алижон Хайруллоевич, старший преподаватель  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

В данной работе приводятся некоторые численные результаты исследования трехмерных турбулентных струй реагирующих газов, истекающих из сопла прямоугольной формы и распространяющихся в затопленном (спутном) потоке воздуха при диффузионном горении.

**Постановка задачи.** Предположим, горячая струя смеси пропанобутана поступает из прямоугольного сопла со сторонами  $2a$  и  $2b$ , оси  $OY$  и  $OX$  параллельно сторонам сопла соответственно, а ось  $OZ$  направлена вдоль горячей струи. Используем свойства центральной симметрии течения относительно оси  $OZ$  так, чтобы это позволило рассмотреть только одну четверть прямоугольной струи.

Для описания данного течения используем параболизированные системы уравнений Навье-Стокса [1/4]. Далее приводим систему уравнений в безразмерном виде, выбрав в качестве масштаба длин величину  $b$ , для скоростей  $u_2$  (здесь и далее индекс 2 относится к исходным значениям горючей струи), плотности-  $\rho_2$ , давление-  $p_2 u_2^2$ ; полная энтальпия и теплота образования  $i$ -й компоненты-  $u_2^2$ , эффективной турбулентной вязкости-  $\nu_2 u_2^2$ , теплоемкости при постоянном давлении  $-(R/M_1)$ , температуры-  $u_2^2 / (R/M_1)$ , молекулярных весов  $M_1$  ( $M_1$ -молекулярных вес окислителя), а также, преобразовав входное сечение сопла в квадратную область с помощью формулы:  $y = \frac{y}{L}$  ( $L = \frac{a}{b}$ , в дальнейшем тильду над переменными опускаем):

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{L} \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{1}{L} \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial u}{\partial z}) \tag{2}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{1}{L} \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{L \partial y} + \frac{4}{3L^2} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial v}{\partial z}) - \frac{2}{3L} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial w}{\partial z}) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial w}{\partial y}) \tag{3}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{1}{L} \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial w}{\partial z}) + \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial w}{\partial y}) - \frac{2}{3L} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial w}{\partial z}) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{1}{L} \frac{\partial H}{\partial y} + \rho w \frac{\partial H}{\partial z} &= \frac{1}{L^2 Pr_r} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial H}{\partial y}) + \frac{1}{Pr_r} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial H}{\partial z}) + (1 - \frac{1}{Pr_r}) \left[ \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial y} (\mu u \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu u \frac{\partial u}{\partial z}) + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (\mu v \frac{\partial v}{\partial z}) + \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial y} (\mu w \frac{\partial w}{\partial y}) \left. \right] + (\frac{4}{3} - \frac{1}{Pr_r}) \left[ \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial y} (\mu v \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu w \frac{\partial w}{\partial z}) \right] - \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y} (\frac{2}{3} \mu v \frac{\partial w}{\partial z}) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z} (\mu u \frac{\partial w}{\partial y}) + \\ &+ \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y} (\mu w \frac{\partial v}{\partial z}) - \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z} (\frac{2}{3} \mu w \frac{\partial v}{\partial z}) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\rho u \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \rho v \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = \frac{1}{L^2 Sc_r} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial \bar{C}}{\partial y}) + \frac{1}{Sc_r} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial \bar{C}}{\partial z}) \tag{6}$$

$$P = pT \sum_{i=1}^{N_k} \frac{c_i}{M_i} \tag{7}$$

$$H = c_p T + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \sum_{i=1}^{N_k} c_i h_i \quad (8)$$

Для вычисления эффективной турбулентной вязкости используем модель, учитывающую молекулярный перенос, трехмерность и температурную неоднородность струи в виде:

$$\mu = \mu_\lambda + \alpha \rho l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{L \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{L \partial y}\right)^2} \cdot \left(\frac{T}{T_2}\right)^\alpha \quad (9)$$

В уравнениях (9) обозначения общепринятое  $\left[\frac{2}{4}\right]$ . Уравнения концентрации (6) написано в форме консервативной функции Шваба-Зельдовича относительно массовой концентрации  $i$ -тых компонентов, позволяющая свести число уравнения с источниками членами до одного для четырехкомпонентной смеси.

Литература:

1. Дж. Дж. Мак-Гирк В. Роди. Расчет трехмерных свободных струй. // Турбулентные сдвиговые течения-М: Машиностроение 1982.Т. 1.с.72–88
2. С. Ходжаев. Метод расчета неизобарических трехмерных турбулентных струй реагирующих газов вытекающих из сопла прямоугольной формы.// Сб суяклик куп фазали аралашмалар ва туташ мухитларда тулкиларни таркалишининг долзарб муаммолари. Тошкент, Фан 1999 2-кисм,408–409 б
3. Д. Андерсон. Дж. Таннехилл, Р. Плетчер, Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В. 2-х Т. — М: Мир 1990 Т-2. 792–384с
4. Ю. В. Лапин, М. Х. Стрелец. Внутренние течения газовых смесей. — М: Наука 1989–368с

## Выбор математической модели и исследования трехмерных турбулентных струй

Авезов Алижон Хайруллоевич, старший преподаватель  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Для газовых струй, отличающихся не только скоростью, но и плотностью, только эксперимент или хорошо обоснованная математическая модель может показать, какой из параметров (отношение значения скорости, плотности или динамического напора и др.) является наиболее важным.

Турбулентное горение перемешанных горючих газов, истекающих из прямоугольного сопла, находит широкое применение в самых различных областях техники — от обычных огнетехнических устройств ряда процессов химической технологии. В этом случае изучение их аэротермодинамических характеристик, с учетом кинетики процесса, представляет большой интерес. В тоже время детальное исследование горения перемешанных газов, истекающих, из произвольного прямоугольного сопла перемешанных горючих газов практически отсутствует.

Одной из целей, данной работы является выбор вида полуэмпирической формулы для определения коэффициента — турбулентной вязкости.

Для трехмерных сдвиговых свободных турбулентных струйных течений, формула Прандтля

$$\mu_T = \rho l^2 \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

дает качественно правильные результаты, для пристенных течений.

Кроме того, формула (1) не учитывает деформацию продольной скорости по другим пространственным координатам и температуру, которые существенно влияют на результаты исследования. Также неизвестно как определить длину пути перемешивания для трехмерных струйных течений в модели (1).

В данной работе приводятся некоторые результаты численного исследования горения смеси пропан — бутана, истекающего из сопла прямоугольной формы и распространяющегося в покоящейся среде воздуха. Для описания течения использованы трехмерные параболизированные системы уравнений Навье-Стокса для многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей. Численные исследования проведены на основе эффективного метода подобных SIMPLE прямым методом решается уравнение Пуассона для определения поправки к скоростям [1].

Для вычисления турбулентной вязкости предложена для численного исследования использована модель, учитывающую молекулярный перенос, трехмерность и температурную неоднородность в виде

$$\mu_T = \alpha \rho l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{L \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{L \partial y}\right)^2} \cdot \left(\frac{T}{T_2}\right)^\alpha, \quad (2)$$

где  $\alpha$  — число Кармана,  $\alpha$  — степень влияния температуры неоднородности потока ( $0,5 < \alpha < 0,7$ ).  $T^2$  — температура горючей струи на оси симметрии,  $L$  — отношения сторон прямоугольного сопла,  $l$  — длина пути перемешивания определяется как

$$\sqrt{b^2(Ly) + b^2(z)}$$

Для основного расчетного варианта исходные значения параметров брались следующим образом [2]

I. Зона окислителя: II. Зона горючего:  
 $T_1 = 300\text{K}$   $u_1 = 0$ ;  $T_2 = 1200\text{K}$   $u_2 = 61\text{м/с}$ ;  
 $(C_1)_1 = 0,232$ ;  $(C_2)_1 = 0$ ;  $(C_1)_2 = 0$ ;  $(C_2)_2 = 0,12$ ;  
 $(C_3)_1 = 0$ ;  $(C_4)_1 = 0$ ;  $(C_3)_2 = 0$ ;  $(C_4)_2 = 0,88$ ;  
 $Pr = Sc = 0,65$ ;  $P_1 = P_2 = \text{const}$ ;  $L = 1$

С точки зрения математического расчета рассмотрим четырёхкомпонентную смесь газов в зоне смешения, состоящую из кислорода  $O_2$  — индекс «1», смеси про-

пана — бутана ( $C_3H_8 + C_4H_{10}$ ) — «2», продуктов горения  $CO_2 + 9H_2O$  — «3», инертного газа  $N_2$  — «4». С физической точки зрения в зоне тепло — и массообмена участвуют 6 компонентов.

В данной работе приводятся некоторые численные результаты касающиеся влияния исходных данных скорости, температуры струи и окислителя на параметры диффузионного факела.

В частности, можно отметить, что подогрев горючего и окислителя приводит к незначительному удлинению длину факела.

В этом случае соблюдаются известные закономерности изменения границы, т.е при подаче более нагретого горючего граница зоны смешения растет более медленно, однако переход к круглой форме факела затягивается, т.е. как даже при безразмерной длине по продольной координате  $x = 15$  еще полностью не переходит в круглую форму.

#### Литература:

1. С. Ходжиев. Исследования трехмерных турбулентных струй реагирующих газов, истекающих в спутном (затопленном) потоке в воздухе при диффузионном горении// Узб. Журнал. Проблемы механики. Тошкент. Фан, № 2, 1993. с. 28–33.
2. Вулис, Л. А, Ярин Л. П. Аэродинамика факела. — Л. Энергия. 1978, 216 с.

## Хроматические номера прямоугольников

Алиев Мирза Али оглы, студент  
 Санкт-Петербургский государственный университет

Данная работа посвящена исследованию хроматических номеров и нахождению минимальных раскрасок. Похожая тема была представлена на Колмогоровских чтениях в 2005 году. Тогда в совместной работе Веры и Елены Бушмановых были найдены хроматические номера всех тетра- и пентамино. Задача, являющаяся частным случаем этой работы, была представлена на Санкт-Петербургской городской олимпиаде в 2010 году.

Тема хроматических номеров и минимальных раскрасок породила много открытых вопросов, большинство из которых не решены до сих пор. В частности, оказалось, что даже нахождение хроматических номеров прямоугольников представляет собой весьма сложную и содержательную задачу. В данной работе найдены хроматические номера «широких» прямоугольников, т.е. тех, у которых отношение большей стороны к меньшей не превосходит двух.

#### Постановка и решение задачи

**Определение:** Рассмотрим бесконечную клетчатую плоскость, раскрашенную в  $k$  цветов, и клетчатую фигурку (полимино)  $X$ . Раскраску будем считать правильной, если она обладает следующим свойством: как бы мы ни расположили данную фигуру  $X$  на плоскости (по клеточкам), цвета клеток, которые ограничены фигурой  $X$ , будут различными. Наименьшее такое  $k$  будем называть хроматическим номером фигуры  $X$  (обозначаем  $cr(X)$ ), а соответствующую раскраску назовём минимальной.

**Лемма 1:** Если фигура  $X$  содержится в фигуре  $Y$ , то  $cr(X) \leq cr(Y)$

**Доказательство:** (Бушмановы) Возьмем минимальную, подходящую для  $Y$  раскраску. Допустим, что эта раскраска не подходит для фигурки  $X$ . Значит, есть какая-то фигурка,  $X$  не покрашенная в разные цвета, но этой фигурке соответствует фигурка  $Y$ , которую можно наложить на фигурку  $X$ , тогда получается, что эта фигурка  $Y$  покрашена не в разные цвета. Это противоречит тому, что мы взяли подходящую для  $Y$  раскраску.

**Замечание:** Хроматический номер прямоугольника  $m \times n$  не меньше количества клеток в прямоугольнике, т.е.  $m \times n$ .

Следующая теорема отвечает на вопрос, в каких случаях вышеупомянутое неравенство обращается в равенство.

**Теорема 1:** Хроматический номер прямоугольника  $m \times n$  (где  $m$  и  $n$  — стороны прямоугольника) имеют те и только те прямоугольники, у которых одна из сторон кратна другой.

**Доказательство:** (Карашевич) Пусть дан прямоугольник вида  $m \times n$ . Покажем, что для него существует раскраска. Заметим, что все цвета равноправны. Пусть каждой краске соответствует число, тогда произвольно заполним прямоугольник числами от 1 до  $m^2x$ . Теперь разобьём наш прямоугольник на  $m$  квадратов  $m \times m$ , пронумеруем квадраты числами от 1 до  $x$ , затем ответим на вопрос задачи для полоски  $1 \times x$  (см. рис. 1), теперь в пронумерованные квадраты вставим числа соответствующие номеру квадрата (см. пример на рис. 2 и рис. 3, где  $m = 3, x = 2$ ). Получилась нужная раскраска.

1	X	...	3	2
2	1	...	4	3
⋮	⋮		⋮	⋮
x-1	x-2	...	1	X
X	X-1	...	2	1
1	X	...	3	2

Рис. 1

1	2	3	10	11	12	1	2	3	10
4	5	6	13	14	15	4	5	6	13
7	8	9	16	17	18	7	8	9	16
10	11	12	1	2	3	10	11	12	1
13	14	15	4	5	6	13	14	15	4
16	17	18	7	8	9	16	17	18	7
1	2	3	10	11	12	1	2	3	10
4	5	6	13	14	15	4	5	6	13
7	8	9	16	17	18	7	8	9	16

Рис. 2

	1		2			1			
	2		1			2			
	1		2			1			

Рис. 3

Если же прямоугольник имеет другой вид  $(m \times (mx | p), x > 0, 0 < p < m)$ , то для него раскраски не существует. Пусть большая сторона лежит по вертикали, тогда, нумеруя краски числами по строкам, получим, что все числа в  $m$ -ом столбце кратны  $m$ . Сдвинув наш прямоугольник вправо на одну клетку, легко понять, что все числа из первого столбца совпадают со всеми числами из нового (последнего) столбца. Построим новый прямоугольник, совпадающий левым верхним углом с первым прямоугольником, большая сторона которого лежит по горизонтали. Заметим, что в этом прямоугольнике в каждом  $m$ -ом столбце содержатся числа кратные  $m$ , но так как по горизонтали таких чисел  $mx$ , а в первом прямоугольнике  $(mx | p)$  значит, раскраска некорректна (см. рис. 4).

**Теорема 2:** Если в прямоугольнике отношение большей стороны к меньшей меньше 2, но больше  $3/2$ , то хроматический номер данной фигуры равен  $2m^2$ , где  $m$  — длина меньшей стороны, т.е. если  $2 > n/m > 3/2$ , то  $cr(n \times m) = 2m^2$  (при  $n > m$ )

**Доказательство:** Разобьем наш прямоугольник на блоки, как показано на рис. 5 (жирными линиями выделен исходный прямоугольник):

В данном случае мы просто переворачиваем наш прямоугольник четыре раза и полученные части выделяем в блоки. Блоки А, В, Е, D, F, G — образуют изначальный прямоугольник. Рассмотрим прямоугольник С, все цвета в этом блоке не совпадают с цветами исходного прямоугольника. Теперь рассмотрим прямоугольник А+. Он не может иметь общих цветов с прямоугольниками D, В, Е, F, G, С. Из этого следует, что в прямоугольнике А+ могут быть только цвета из блока А либо новые цвета. Также рассмотрим прямоугольник В+. Он не может иметь общих цветов с прямоугольниками А, D, Е, F, G, С. Аналогично в В+ должны быть цвета из В либо новые. Теперь посмотрим на самый правый блок — это блок Е, с возможно какими-то новыми цветами. Под ним будет располагаться блок D (с возможно какими-то новыми цветами). И наконец, рассмотрим блок, находящийся под блоком С и по размерам равный блоку F. В нем (с учетом уже прибавленных) в сумме новых цветов будет столько же, сколько и в блоке F. Теперь мы можем считать, что у нас появился новый блок (назовем его Н), по размерам равный блоку F.

1	2	3			3a			3d		
4	5	6			3b			3e		
7	8	9			3c			3f		
10	11	12								
13	14	15								
16	17	18								
19	20	21								
22	23	24								
25	26	27								
28	29	30								
31	32	33								

Рис. 4

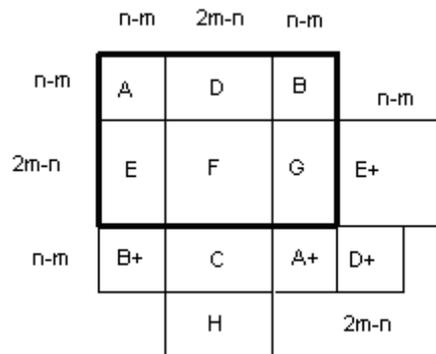


Рис. 5

Теперь посчитаем, сколько всего цветов у нас затрачено:

$$cr(n \times m) \geq 2(n - m)^2 + 2(2m - n)^2 + 4(2m - n)(n - m) = 2(n^2 - 2nm + m^2) + 2(4m^2 - 4nm + n^2) + 4(2nm - 2m^2 - n^2 + nm) = 2n^2 - 4nm + 2m^2 + 8m^2 - 8nm + 2n^2 + 12nm - 8m^2 - 4n^2 = 2m^2.$$

Получили, что у нашего прямоугольника хроматический номер не менее чем у прямоугольника  $m \times 2m$ . Исходный же прямоугольник помещается в прямоугольник  $2m^2$ . По лемме хроматический номер меньшего прямоугольника не больше хроматического номера большего прямоугольника. Из этого следует, что  $cr(n, m)$  строго равен хроматическому номеру прямоугольника  $m \times 2m$ . По теореме 1 хроматический номер  $m \times 2m$  в точности равен  $2m^2$ . На данной картинке мы использовали, что блок E+ «длиннее», чем блок D, т.е.  $(n - m) > (2m - n)$ . В противоположном случае утверждение про блок H неверно. Таким образом, теорема верна при условии

$$(n - m) > (2n - m) \Leftrightarrow n - m - 2m + n > 0 \Leftrightarrow 2n - 3m > 0 \Leftrightarrow n/m > 3/2. \text{ Доказано.}$$

Все раскраски, возникающие в работе, построены по следующему принципу. Дана координатная плоскость (точки с целочисленными координатами соответствуют центрам клеток). Покрасим клетку  $(0,0)$  в первый цвет. Возьмем два вектора  $\vec{a} = (x1, y1)$  и

$b = (x_2, y_2)$ . Покрасим клетки  $\bar{a}k + \bar{b}l$  в этот же цвет, где  $k, l$  — целые числа. Остальные цвета покрасим сдвигом на вектор относительно первого цвета. Количество цветов в этой раскраске равно площади параллелограмма, образованного векторами  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ .

**Лемма 2:** площадь параллелограмма, образованного двумя векторами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  равна  $|x_2y_1 - x_1y_2|$ .

**Доказательство:** Рассмотрим параллелограмм (см. рис. 6), образованный двумя векторами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ :  
 Sпараллелограмма =  $(x_1+x_2)(y_1+y_2) - x_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_2 - x_1y_1 = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_2 - x_1y_1 = x_2y_1 - x_1y_2$  Что и требовалось доказать.

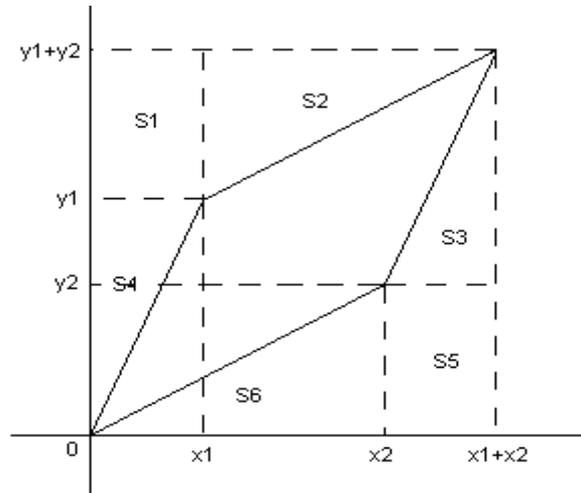


Рис. 6

**Теорема 3:** Если в прямоугольнике отношение большей стороны к меньшей меньше  $3/2$ , но больше 1, то хроматический номер данной фигуры равен  $2nm - m^2$ , где  $n$  — длина большей стороны, а  $m$  — длина меньшей, то есть если  $1 < n/m < 3/2$ , то  $cr(n \times m) = 2nm - m^2$  (при  $n > m$ ).

**Доказательство:** Найдем такие целые  $x$  и  $y$ , что  $m = x + y, n = 2x + y$ . Буквами A, B, C, D, E, F обозначим наборы различных цветов, которые должны быть в искомой раскраске (см. рис.7).

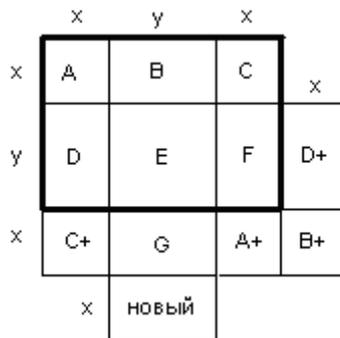


Рис. 7

Повернём исходный прямоугольник на 90 градусов относительно левого верхнего угла. В квадрате C+ могут быть только цвета C или новые (их мы обозначаем как +) Аналогично выясняем для прямоугольника A+. Вследствие этих двух поворотов в прямоугольнике G новый цвет, который мы обозначим как G. В прямоугольнике D+ может быть либо цвет D, либо новый. В прямоугольнике E+ может быть либо цвет E, либо новый. Теперь рассмотрим самый нижний прямоугольник.

В нем может быть только новый цвет и цвета, которые есть в B, но нет в B+.

Получается, что кол-во цветов, нужных для раскраски плоскости не менее  $cr(n \times m) = 2x^2 + y^2 + 4xy + (xy - (xy - x^2)) = (2x + y - x)(2x + y + x)$

Из того что  $m = x + y, n = 2x + y$  следует, что  $x = n - m, y = 2m - n,$

$cr(n \times m) = (2n - 2m + 2m - n - n + m)(2n - 2m + 2m - n + n - m) = m(2n - m) = 2nm - m^2$

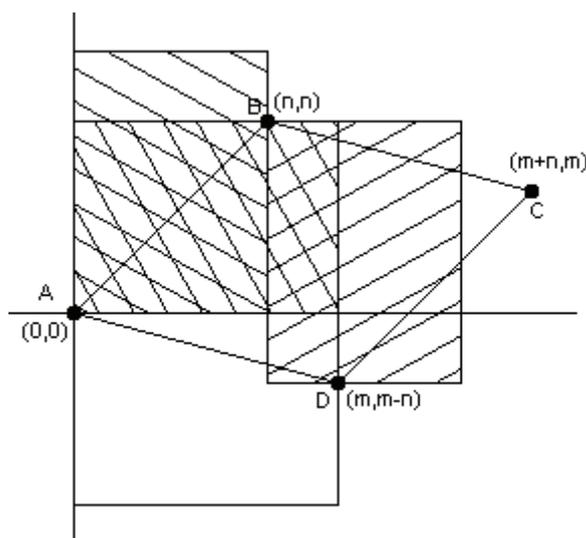


Рис. 8

Докажем, что их достаточно. Рассмотрим координатную плоскость. Покрасим целые точки цветами. Пусть в точках  $A(0,0)$ ,  $B(n,n)$ ,  $C(m+n,m)$ ,  $D(m,m-n)$  находится цвет  $G$  (см. рис. 8). Заметим, что на плоскости не существует прямоугольников  $m \times n$ , содержащих два цвета  $G$ . Тогда кол-во различных цветов равно площади параллелограмма  $ABCD$ .  $abs((n - m)n - mn) = 2nm - m^2$ . Что и требовалось доказать.

**Итог**

В данной работе найдены хроматические номера «широких» прямоугольников, т.е. тех, у которых отношение большей стороны к меньшей не превосходит двух. Задача разбивается на два случая. Если в прямоугольнике отношение большей стороны к меньшей меньше 2, но больше  $3/2$ , то хроматический номер данной фигуры равен  $2m^2$ , где  $m$  — длина меньшей стороны. Для прямоугольников, у которых отношение большей стороны к меньшей меньше  $3/2$ , но больше 1, хроматический номер равен  $2nm - m^2$ , где  $n$  — длина большей стороны, а  $m$  — длина меньшей.

### Слабо сепарабельные пространства

Бешимова Дилором Рузиназаровна, преподаватель  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Напомним, что семейство  $\eta$  открытых подмножеств топологического пространства  $X$  называется  $\Pi$  базой этого пространства, если во всяком непустом открытом множестве  $U$  пространства  $X$  содержится некоторое непустое множество  $V$ , принадлежащее семейству  $\eta$ .

Семейство  $\mu = \{E_\alpha : \alpha \in A\}$  подмножеств топологического пространства  $X$  называется  $\Pi$  – сетью этого пространства, если во всяком непустом открытом множестве  $U$  пространства  $X$  содержится некоторое непустое множество  $E_\alpha$  множества  $\mu$ .

**Определение 1** [В. И. Пономарев]. Топологическое пространство  $X$  называется слабо сепарабельным, если существует  $\Pi$  – база  $G$ , распадающаяся на счетное число центрированных систем открытых множеств, т.е.  $G = U\{G_i : i \in \omega\}$ , где  $G_i = \{U_\alpha^i : \alpha \in A_i\}$   $G_i$  центрированная система открытых множеств любого  $i \in \omega$ .

**Утверждение 1.** Топологическое пространство  $X$  слабо сепарабельно тогда и только тогда, когда в  $X$  существует  $\Pi$  – сеть, являющаяся объединением счетного числа центрированных семейств множеств.

Доказательство. Необходимость вытекает из того, что всякая

$\Pi$  – база является  $\Pi$  сетью пространства  $X$ .

Достаточность. Пусть  $V = U\{V_i : i \in N\}$ .  $\Pi$  – сеть и каждое семейство  $V_i$  центрировано. Положим  $G_i = \{U : U$  открыто в  $X$  и содержит некоторое  $V \in V_i\}$  Тогда очевидно, что семейство  $G_i$  центрировано. Покажем, что  $G = U\{G_i : i \in N\}$  есть  $\Pi$  – база в  $X$ . Пусть  $W$  – непустое открытое множество в  $X$ . Тогда существует такое  $V \in V_i$ , что  $V \subset W$ . Следовательно, по нашему определению  $W \in G_i$ . Таким образом, мы показали, что  $G$  состоит из всех непустых открытых множеств в  $X$ . Утверждение 7.1 доказано.

Поскольку, одноточечные множества всюду плотного подмножества топологического пространства является его  $\Pi$  – сетью, из утверждения 7.1 вытекает

**Утверждение 2.** Всякое сепарабельное пространство слабо сепарабельно.

Напомним, что пространство  $X$  удовлетворяет условию Суслина, если семейство попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства  $X$  счетно.

**Утверждение 3.** Всякое слабо сепарабельное пространство удовлетворяет условию Суслина.

Доказательство. Пусть  $X$  — слабо сепарабельное пространство и  $G = \{G_i : i \in \omega\}$  его  $\Pi$  – база, распадающаяся в сумму счетного числа центрированных систем  $G_i$ . Возьмем произвольную дизъюнктивную систему  $\sigma = \{G_\beta : \beta \in B\}$  непустых открытых подмножеств в пространстве  $X$ . Определим отображение  $\varphi: B \rightarrow \omega$  следующим образом. Поскольку  $G$  — есть  $\Pi$  – база пространства  $X$  для данного  $\beta \in B$  существует такое множество  $A \in G$ , что  $A \in G_\beta$ . Положим  $\varphi\{\beta\} = i$  где  $A \in G_i$  (если существует несколько  $i$ , для некоторых  $A \in G$ , то выберем одно из них). Таким образом, отображение  $\varphi$  определено. Оно является вложением. В самом деле, пусть  $\beta \neq \beta'$ ,  $G_{\varphi(\beta)} \ni A \in G_\beta$ ,  $G_{\varphi(\beta')} \ni A' \in G_{\beta'}$ . Тогда,

в силу дизъюнктивности системы  $\mathcal{Y}$  имеем  $A \cap A' = \emptyset$ . Значит, в силу центрированности семейств  $G_i$ , имеем  $A \notin G_{\varphi(\beta')}$ , откуда  $\varphi(\beta) \neq \varphi(\beta')$ . Итак,  $\varphi$  вкладывает множество  $B$  в счетное множество  $\omega$ . Следовательно, всякая дизъюнктивная система непустых открытых подмножеств пространства  $X$  счетна. Утверждение 7.3 доказано.

**Утверждение 4.** Для метрических пространств  $X$  следующие условия эквивалентны:

- $X$  — слабо сепарабельное пространство;
- $X$  — сепарабельное пространство.

Доказательство. Пусть метрическое пространство  $X$  слабо сепарабельно. В этом случае в силу утверждения 7.3 пространство  $X$  удовлетворяет условию Суслина. Тогда в силу следующей задачи N: 214 гл. 11 работы [2]:

Метрическое пространство  $X$  сепарабельно в том и только в том случае, когда оно удовлетворяет условию Суслина. Получаем, что пространство  $X$  сепарабельно. Импликация  $a) \Rightarrow b)$  вытекает из утверждения 2. Утверждение 4 доказано.

**Утверждение 5.** Пусть  $Y$  всюду плотное подмножество в топологическом  $T_1$ -пространстве  $X$ , тогда  $d(X) \leq d(Y)$ ,  $wd(X) = wd(Y)$ .

Литература:

- Radul, T. N. On the functor of order-preserving functionals. // Comment. Math. Unif. Carol. 1998. V. 39. No. 3. P. 609–615.
- Жиемуратов, Р. Е. Топологические и категорные свойства пространства нелинейных  $\sigma$ -гладких функционалов. Канд. Дисс. Ташкент, ИМИТ, 2010, стр. 69.
- Бешимов, Р. Б. О слабой плотности топологических пространств // ДАН РУз. — 2000. — № 11. — с. 10–13.

## Поиск равновесных решений в модели страхования

Голубев Руслан Игоревич, студент;  
Медведев Кирилл Сергеевич, студент;  
Лонягина Юлия Евгеньевна, студент  
Санкт-Петербургский государственный университет

*Рассматривается модель вертикальной дифференциации на рынке страхования, предложенная и исследованная в работах [4], [5], [6], [7], [8]. Конкуренция двух фирм моделируется с помощью двухшаговой игры (первый шаг — выбор качества предоставляемой услуги, второй шаг — выбор цен), при этом каждый потребитель выбирает страховую услугу, максимизируя собственную функцию потребительского излишка, и единственный параметр неоднородности потребителей — вероятность наступления страхового случая.*

**Ключевые слова:** страхование, вертикальная дифференциация, равновесие, дуополия

Неотъемлемой частью современной экономики является сфера страхования. Человеческая жизнь устроена так, что невозможно исключить возникновение непредвиденных ситуаций, вызванных явлениями природы или обстоятельствами, которые не зависят от воли и желания человека. Эти неблагоприятные события, среди которых наиболее распространены стихийные бедствия и несчастные случаи, могут привести к значительным материальным убыткам, ущербу здоровья или потере трудоспособности. Отсюда возникает необходимость поиска путей минимизации указанных потерь, что и обусловило появление и развитие страхования.

Каждая фирма при выборе своего стратегического решения наряду с эластичностью спроса и структурой собственных издержек, должна принимать во внимание возможную реакцию своих конкурентов. Таким образом, задача стратегической конкуренции нескольких фирм в условиях олигополии относится к классу задач принятия решений в условиях конфликта и неопределённости, для исследования которых применяется инструментарий математической теории игр [1], [2]. Для построения SPE (subgame perfect equilibrium) в позиционной игре будет использована попятно-рекуррентная процедура, то есть в рассматриваемой нами двухшаговой игре мы будем начинать со второго шага [3].

**Базовые предпосылки модели**

1. Потребители формируют собственные оценки качества  $q \in [q, \bar{q}]$  предлагаемых им услуг, которые играют роль как в определении верхней границы цены  $tq$ , приемлемой для данных потребителей, так и в выборе конкретной услуги из качества доступных.

2. Потребители в разной степени готовы платить большую цену за повышение качества предлагаемых услуг. Обозначим за  $t$  — параметр, определяющий вероятность страхового случая потребителя:

$$0 \leq t \leq \bar{t} \leq 1.$$

3. Множество стратегий фирмы — это всевозможные вектора  $(q_i, p_i)$ , где  $q_i$  — качество предлагаемых услуг,  $p_i$  — цена ( $i = 1, 2$ ).

Перейдём к формализованному описанию двухшаговой теоретико-игровой модели вертикальной дифференциации в условиях олигополистической конкуренции.

На первом этапе фирмы одновременно выбирают уровни качества  $q_i \in [q, \bar{q}]$ , достижение которых требует издержек  $FC(q_i)$ . При этом

$$q \leq q_1 < q_2 \leq \bar{q}. \tag{1}$$

С точки зрения потребителей услуги являются заменителями, и в рассматриваемый промежуток времени потребитель может приобрести не более одной услуги.

На втором шаге (этап ценовой конкуренции) фирмы, зная вектор выбранных на первом шаге уровней качеств  $(q_1, q_2)$ , одновременно назначают цены на свои услуги  $(p_1, p_2)$  соответственно.

Каждый потребитель из числа  $S$  (далее будем считать, что  $S = 1$ ) стремится максимизировать свою функцию потребительского излишка следующего вида:

$$U = \max\{tq_1 - p_1, tq_2 - p_2\},$$

где  $t \in [0, \bar{t}]$  — параметр, который показывает вероятность страхового случая потребителя. Чем больше вероятность страхового случая, тем большую цену готов заплатить потребитель за услуги страхования. Предполагается, что мы рассматриваем случай обязательного страхования, а также, что параметр  $t$  — случайная величина, равномерно распределённая на отрезке  $[0, \bar{t}]$ ,  $\bar{t} \leq 1$ . Реакция потребителей на вектор  $(q_1, p_1, q_2, p_2)$  однозначно определяет доли рынка и доход каждой из фирм (см. Рис. 1). Цель фирм — максимизация прибыли от реализации своих услуг за рассматриваемый период.

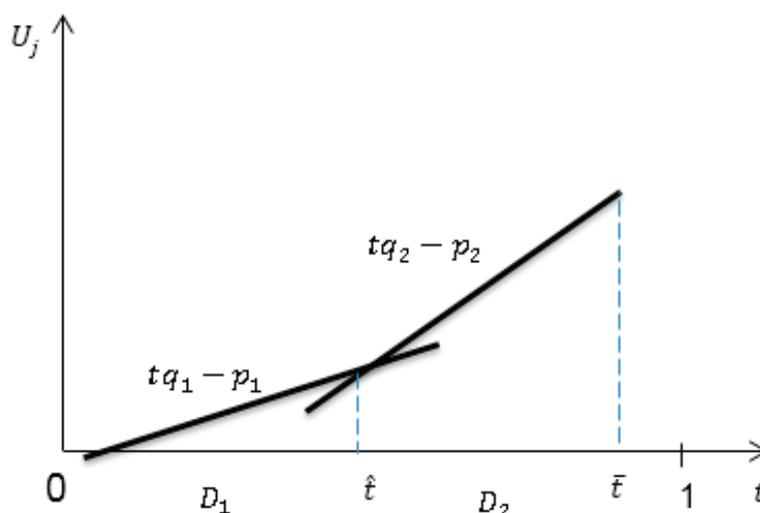


Рис. 1. График самоотбора потребителей

Точка  $\hat{t} = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}$  на Рис. 1. отвечает потребителю, которому покупка услуги той или иной фирмы в равной степени привлекательна.

Все потребители, для которых параметр  $t \in [0, \hat{t}]$ , выберут услуги первой фирмы, а все потребители, для которых параметр  $t \in [\hat{t}, \bar{t}]$ , выберут товар второй фирмы. Так как доли рынка должны быть неотрицательны, необходимо ввести ограничение:

$$0 < \hat{t} < \bar{t}. \tag{2}$$

Функции ожидаемой прибыли обеих фирм могут быть записаны в виде:

$$\Pi_1 = \frac{1}{\bar{t}} \left[ \hat{t} p_1 - \int_0^{\hat{t}} v t dt \right] - FC(q_1), \tag{3}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{\bar{t}} \left[ (\bar{t} - \hat{t}) p_2 - \int_{\hat{t}}^{\bar{t}} v t dt \right] - FC(q_2), \tag{4}$$

где  $FC(q_i)$  — это затраты на улучшение качества (постоянные издержки),  $v > 0$  — средний размер страхового возмещения, а  $vt$  — ожидаемые затраты по сопровождению страхового случая потребителя с параметром  $t$  (cost of the claims handing procedure).

Для построения абсолютного равновесия мы будем использовать “попятно-рекуррентную процедуру”. То есть на первом шаге мы будем рассматривать этап ценовой конкуренции и строить SPE. В соответствии с построенным равновесием далее будем рассматривать первый этап — конкуренцию по качеству.

Рассмотрим модель конкуренции “лидер-последователь” и построим равновесие по Штакельбергу в ценах при условии того, что фирма 2 будет лидером, а фирма 1 — ведомым, также найдём оптимальные параметры цен и качеств для обеих фирм.

**Равновесие по Штакельбергу на этапе ценовой конкуренции**

Найдём функцию реакции фирмы 1 из формулы (3):

$$\Pi_1(p_1, p_2) = \frac{1}{\bar{t}} \left[ \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} p_1 - \frac{v}{2} \left( \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} \right)^2 \right],$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = \frac{-\frac{p_1}{-q_1 + q_2} + \frac{-p_1 + p_2}{-q_1 + q_2} + \frac{(-p_1 + p_2)v}{(-q_1 + q_2)^2}}{\bar{t}} = 0, \tag{5}$$

при условии ограничений (2).

Выразим из (5)  $p_1$ :

$$p_1(p_2) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{v}{v + 2\Delta q} \right) p_2. \tag{6}$$

Принимая во внимание такое поведение фирмы 1, составим функцию ожидаемой прибыли для фирмы  $\Pi_2$ . Подставив (6) в (4), мы получим функцию прибыли для фирмы 2:

$$\Pi_2(p_1(p_2), p_2) = \frac{(p_2 - \bar{t}(2q_2 - 2q_1 + v))(\bar{t}v(2q_2 - 2q_1 + v) - p_2(4q_2 - 4q_1 + v))}{2\bar{t}(2q_2 - 2q_1 + v)^2} \tag{7}$$

Функция (7) имеет единственный максимум когда

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = \frac{\bar{t}(2q_2 - 2q_1 + v)^2 - p_2(4q_2 - 4q_1 + v)}{\bar{t}(2q_2 - 2q_1 + v)^2} = 0,$$

так как  $\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial p_2^2} = \frac{4q_1 - 4q_2 - v}{\bar{t}(-2q_1 + 2q_2 + v)^2} < 0$ . Следовательно, можно сформулировать следующее утверждение:

**Утверждение:** Вектор цен (8) образует 2-равновесие по Штакельбергу на втором шаге двухшаговой игры в модели страхования для любых  $q_1, q_2$ , удовлетворяющих условиям (1) и (2).

$$\begin{cases} p_2 = \frac{\bar{t}(2q_2 - 2q_1 + v)^2}{4q_2 - 4q_1 + v}, \\ p_1 = \frac{\bar{t}(2q_2 - 2q_1 + v)(q_2 - q_1 + v)}{4q_2 - 4q_1 + v}. \end{cases} \quad (8)$$

Далее рассмотрим этап конкуренции по качеству, предполагая, что  $FC(q) = 0$ . С учётом (8) функция ожидаемой прибыли фирмы 2 будет выглядеть:

$$\Pi_2(q_1, q_2) = \frac{2(q_1 - q_2)^2 \bar{t}}{-4q_1 + 4q_2 + v}.$$

Тогда при условии (1)

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = \frac{4(q_2 - q_1) \bar{t} (2q_2 - 2q_1 + v)}{(4q_2 - 4q_1 + v)^2} > 0.$$

Значит, функция  $\Pi_2$  является возрастающей по переменной  $q_2$ . Следовательно, оптимальный уровень качества фирмы 2 есть  $q_2 = \bar{q}$ .

Функция ожидаемой прибыли фирмы 1 может быть записана следующим образом

$$\Pi_1(q_1, q_2) = -\frac{\bar{t}(2q_1 - 2q_2 - v)^2}{2(-4q_1 + 4q_2 + v)^2},$$

тогда, учитывая (1) и (7),

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = -\frac{\bar{t}(4q_2 - 4q_1 - v)(2q_2 + 2q_1 - v)^2}{(4q_2 - 4q_1 + v)^3} < 0.$$

Значит, функция  $\Pi_1$  является убывающей по переменной  $q_1$ . Следовательно, оптимальный уровень качества фирмы 1 есть  $q_1 = \underline{q}$ .

### Заключение

Было построено равновесие по Штакльбергу с ценах при условии того что фирма 2 лидер, а фирма 1 последователь. Так же было показано, что в рассматриваемой задаче присутствует максимальная дифференциация по качеству.

Литература:

1. Мазалов, В. В. Математическая теория игр и приложения. СПб.: Лань, 2010. 448 с.
2. Петросян, Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. Изд. 2-е. СПб.: БХВ-Петербург, 2014. 432 с.
3. Петросян, Л. А., Кузютин Д. В. Устойчивые решения позиционных игр. СПб.: Издательство СПбГУ, 2008. 326 с.
4. Kuzyutin, D. V., Nikitina M. V., Smirnova N. V., Razgulyaeva L. N. The vertical differentiation model in the insurance market: costs structure and equilibria analysis // Contributions to Game Theory and Management, 2015. P. 176–186
5. Okura, M. The vertical differentiation model in the insurance market // International Journal of Economics and Business Modeling, 2010. № 1 (2). P. 12–14.
6. Schlesinger, H., Schulenburg J. Search costs, switching cost and product heterogeneity in an insurance market // M. G. V. D. Journal of Risk and Insurance, 1991. № 58. P. 109–119.
7. Schlesinger, H., Schulenburg J. Consumer information and decisions to switch Insurers. // M. G. V. D. Journal of Risk and Insurance, 1993. № 60. P. 591–615.
8. Tirole, J. The theory of industrial organization. Cambridge: The MIT Press, MA. 1988. 943 p.

## Поиск оптимальных контрактов в модели добровольного страхования

Голубев Руслан Игоревич, студент;  
Чернышов Дмитрий Олегович, студент;  
Медведев Кирилл Сергеевич, студент  
Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматривается модель вертикальной дифференциации на рынке страхования, предложенная и исследованная в работах [4], [5], [6], [7], [8]. Фирма монополист предлагает потребителям услуги различного качества и цен, при этом каждый потребитель выбирает страховую услугу, максимизируя собственную функцию потребительского излишка, и единственный параметр неоднородности потребителей — вероятность наступления страхового случая.

**Ключевые слова:** страхование, вертикальная дифференциация, монополия, задача нелинейного программирования

Неотъемлемой частью современной экономики является сфера страхования. Человеческая жизнь устроена так, что невозможно исключить возникновение непредвиденных ситуаций, вызванных явлениями природы или обстоятельствами, которые не зависят от воли и желания человека. Эти неблагоприятные события, среди которых наиболее распространены стихийные бедствия и несчастные случаи, могут привести к значительным материальным убыткам, ущербу здоровья или потере трудоспособности. Отсюда возникает необходимость поиска путей минимизации указанных потерь, что и обусловило появление и развитие страхования.

### Базовые предпосылки модели

1. Потребители формируют собственные оценки качества  $q \in [\underline{q}, \bar{q}]$  предлагаемых им услуг, которые играют роль как в определении верхней границы цены  $tq$ , приемлемой для данных потребителей, так и в выборе конкретной услуги из качества доступных или отказаться от всех.

2. Потребители в разной степени готовы платить большую цену за повышение качества предлагаемых услуг. Обозначим за  $t$  — параметр, определяющий вероятность страхового случая потребителя:

$$0 \leq \hat{t}_2 \leq \hat{t}_3 \leq \bar{t} \leq 1.$$

3. Множество стратегий фирмы — это всевозможные вектора  $(q_i, p_i)$ , где  $q_i$  — качество предлагаемых услуг,  $p_i$  — цена ( $i = 1, 2, 3$  — количество контрактов предлагаемых фирмой).

На первом этапе фирма выбирает уровни качества  $q_i \in [\underline{q}, \bar{q}]$ . При этом

$$\underline{q} \leq q_1 < q_2 < q_3 \leq \bar{q}. \quad (1)$$

С точки зрения потребителей услуги являются заменителями, и в рассматриваемый промежуток времени потребитель может приобрести не более одной услуги.

На втором шаге фирма назначает цены на свои услуги  $(p_1, p_2, p_3)$  соответственно.

Каждый потребитель из числа  $S$  (далее будем считать, что  $S = 1$ ) стремится максимизировать свою функцию потребительского излишка следующего вида:

$$U = \max\{0, tq_1 - p_1, tq_2 - p_2, tq_3 - p_3\},$$

где  $t \in [0, \bar{t}]$  — параметр, который показывает вероятность страхового случая потребителя. Чем больше вероятность страхового случая, тем большую цену готов заплатить потребитель за услуги страхования.  $t$  — случайная величина, равномерно распределённая на отрезке  $[0, \bar{t}]$ ,  $\bar{t} \leq 1$ . Цель фирмы — максимизация прибыли от реализации своих услуг за рассматриваемый период.

Точки  $\hat{t}_2 = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}$  и  $\hat{t}_3 = \frac{p_3 - p_1}{q_3 - q_1}$  на Рис. 1. отвечает потребителям, которым покупка услуги с той или иной ценой в равной степени привлекательна.

Все потребители, для которых параметр  $t \in [\frac{p_1}{q_1}, \hat{t}_2]$ , выберут услуги по цене  $p_1$ , все потребители, для которых параметр  $t \in [\hat{t}_2, \hat{t}_3]$ , выберут услуги по цене  $p_2$ , а все потребители, для которых параметр  $t \in [\hat{t}_3, \bar{t}]$ , выберут услуги по цене  $p_3$ . Так как доли рынка должны быть неотрицательны, необходимо ввести ограничение:

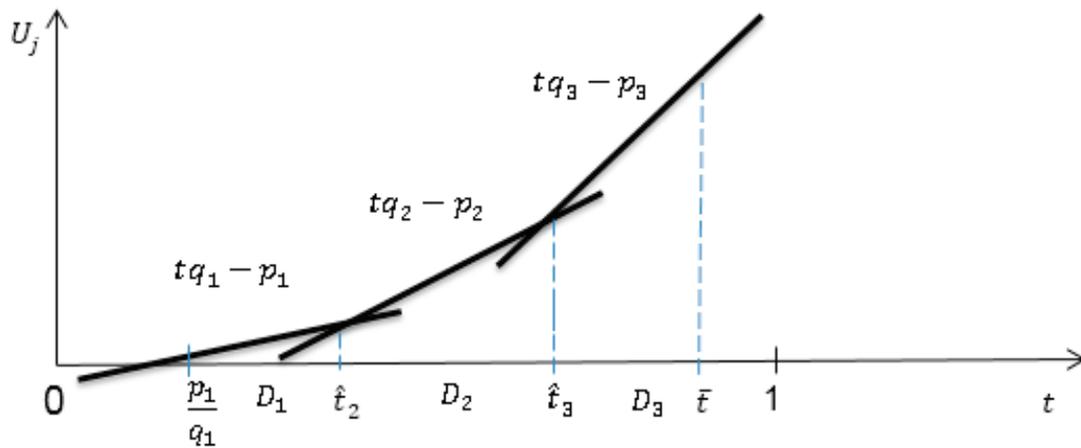


Рис. 1. График самоотбора потребителей

$$0 \leq \frac{p_1}{q_1} \leq \hat{t}_2 \leq \hat{t}_3 \leq \bar{t} \leq 1 \tag{2}$$

Функция ожидаемой прибыли фирмы будет выглядеть:

$$\Pi(q_i, p_i) = \frac{1}{\bar{t}} \left[ (\hat{t}_2 - \frac{p_1}{q_1}) p_1 + (\hat{t}_3 - \hat{t}_2) p_2 + (\bar{t} - \hat{t}_3) p_3 - \int_{\frac{p_1}{q_1}}^{\bar{t}} v t dt \right], i \in \{1, 2, 3\}, \tag{3}$$

учитывая (2).

Где  $v > 0$  — средний размер страхового возмещения, а  $v t$  — ожидаемые затраты по сопровождению страхового случая потребителя с параметром  $t$  (cost of the claims handling procedure).

### Поиск оптимальных контрактов

Чтобы максимизировать функцию прибыли (3), используем попятно-рекуррентную процедуру, начиная со второго шага (нахождения вектора оптимальных цен).

Составим и решим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_1} = \frac{2p_2 q_1^2 - p_1(q_1(2q_2 + v) - q_2 v)}{q_1^2(q_2 - q_1)\bar{t}} = 0, \\ \frac{\partial \Pi(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_2} = \frac{2(p_3(q_2 - q_1) - p_2(q_3 - q_1) + p_1(q_3 - q_2))}{(q_2 - q_1)(q_3 - q_2)\bar{t}} = 0, \\ \frac{\partial \Pi(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_3} = 1 - \frac{2(p_3 - p_2)}{(q_3 - q_2)\bar{t}} = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{q_1^2 \bar{t}}{2q_1 - v}, \\ p_2 = \frac{\bar{t}(2q_1 q_2 + q_1 v - q_2 v)}{2(2q_1 - v)}, \\ p_3 = \frac{\bar{t}(-q_3 v + q_1(2q_3 + v))}{4q_1 - 2v}, \end{cases}$$

которое является точкой максимума функции ожидаемой прибыли  $\Pi(q_i, p_i)_{i \in \{1, 2, 3\}}$  при условиях (1) и  $v < 2q_1$ .

Теперь рассмотрим первый этап (поиск оптимальных качеств). Функция ожидаемой прибыли  $\Pi(q_1, q_2, q_3)$ , может быть записана в виде:

$$\Pi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\bar{t}(2q_1 q_3 - (3q_1 + q_3)v + 2v^2)}{8q_1 - 4v}.$$

Как можно заметить,  $\Pi(q_1, q_2, q_3)$  не зависит от  $q_2$ . Производная

$$\frac{\partial \Pi(q_1, q_3)}{\partial q_1} = -\frac{\bar{t}v^2}{4(-2q_1 + v)^2}$$

строго отрицательна, а производная

$$\frac{\partial \Pi(q_1, q_3)}{\partial q_3} = \frac{\bar{t}}{4}$$

строго положительна. Следовательно, оптимальный уровень качества  $q_1$  есть  $\underline{q}$ , а оптимальный уровень качества  $q_3$  есть  $\bar{q}$ .

Таким образом, функция прибыли  $\Pi(q_1, q_2, q_3)$  будет выглядеть следующим образом

$$\Pi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\bar{t}(2q\bar{q} - (3q + \bar{q})v + 2v^2)}{8q - 4v} = \frac{\bar{t}}{4} \left( \frac{q}{v} - \frac{2v(v - \frac{8}{2}q)}{v - 2q} \right), \tag{4}$$

что является результатом при рассмотрении двух контрактов, полученное в [4].

Таким образом, можно сделать вывод, что фирме не имеет смысла предлагать три контракта.

Рассмотрим альтернативное решение задачи максимизации функции прибыли  $\Pi(q_i, p_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ . Обозначим ограничения  $0 < \frac{p_1}{q_1} < \hat{t}_2 < \hat{t}_3 < \bar{t}$  следующим образом:

$$\begin{cases} g_1 = \frac{p_1}{q_1}, \\ g_2 = \hat{t}_2 - \frac{p_1}{q_1}, \\ g_3 = \hat{t}_3 - \hat{t}_2, \\ g_4 = \bar{t} - \hat{t}_3, \end{cases}$$

и воспользуемся теоремой Куна-Таккера.

Рассмотрим ЗНП:

$$\begin{cases} \max \Pi(q_i, p_i), \\ g_j \geq 0, \\ i \in \{1,2,3\} \\ j \in \{1,2,3,4\} \end{cases} \tag{5}$$

Условие регулярности в ЗНП считается выполненным. Пусть  $(p_i^*, q_i^*)$  — оптимальное решение (19). Следовательно  $(p_i^*, q_i^*)$  удовлетворяет условиям Куна-Таккера:

1.  $q_i \geq 0, j = 1,4$  — условие допустимости.
2.  $\exists \delta_j, j = 1,4: \bar{\nabla} \Pi(q_i, p_i) + \sum_{j=1}^m (\delta_j \bar{\nabla} g_j) = 0$  — условие оптимальности.
3.  $\delta_j g_j = 0$  — условие дополняющей нежесткости.

Составим функцию Лагранжа для данной задачи:

$$\begin{aligned} \Pi(q_i, p_i)_{i \in \{1,2,3\}} &= \frac{1}{\bar{t}} \left[ \left( \hat{t}_2 - \frac{p_1}{q_1} \right) p_1 + (\hat{t}_3 - \hat{t}_2) p_2 + (\bar{t} - \hat{t}_3) p_3 - \int_{\frac{p_1}{q_1}}^{\bar{t}} vt dt \right] + \\ &+ r_1 \left( \frac{p_1}{q_1} \right) + r_2 \left( \frac{p_2 - p_1}{(q_2 - q_1)} - \frac{p_1}{q_1} \right) + r_3 \left( \frac{p_3 - p_2}{(q_3 - q_2)} - \frac{p_2 - p_1}{(q_2 - q_1)} \right) - r_4 \left( \bar{t} - \frac{p_3 - p_2}{(q_3 - q_2)} \right). \end{aligned}$$

Решая задачу нелинейного программирования было получено решение (4).

**Заключение**

Был изучен вопрос о целесообразности применения фирмой монополистом трёх различных контрактов в условиях добровольного страхования. Задача была решена двумя способами: с помощью попятно-рекуррентной процедуры [2], и используя теорему Куна-Таккера [1]. Из приведённых решений можно сделать вывод, что такое поведение не принесет фирме больше прибыли, чем при использовании фирмой двух контрактов.

Литература:

1. Васильев, Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, Гл. ред. ФИЗМАТЛИТ, 2002. 824 с.
2. Петросян, Л. А., Кузютин Д. В. Устойчивые решения позиционных игр. СПб.: Издательство СПбГУ, 2008. 326 с.
3. Kuzyutin, D. V., Nikitina M. V., Smirnova N. V., Razgulyaeva L. N. The vertical differentiation model in the insurance market: costs structure and equilibria analysis // Contributions to Game Theory and Management, 2015. P. 176–186
4. Okura, M. The vertical differentiation model in the insurance market // International Journal of Economics and Business Modeling, 2010. № 1 (2). P. 12–14.
5. Schlesinger, H., Schulenburg J. Search costs, switching cost and product heterogeneity in an insurance market // M. G. V. D. Journal of Risk and Insurance, 1991. № 58. P. 109–119.
6. Schlesinger, H., Schulenburg J. Consumer information and decisions to switch Insurers. // M. G. V. D. Journal of Risk and Insurance, 1993. № 60. P. 591–615.
7. Tirole, J. The theory of industrial organization. Cambridge: The MIT Press, MA. 1988. 943 p.

## Программная реализация одного класса многошаговых игр поиска

Заковряшин Егор Михайлович, студент;  
Бурмистров Валерий Дмитриевич, студент  
Санкт-Петербургский государственный университет

*В данной работе была рассмотрена многошаговая задача поиска неподвижного объекта, спрятанного среди  $n$  коробок, за  $k$  шагов, в которой обучающийся ищущий стремится минимизировать затраты ресурсов, требуемые на нахождение объекта при условии, что вероятность найти объект при просмотре верной коробки не равна единице. Обучаемость ищущего заключается в запоминании коробок, в которых уже был произведен поиск. Была рассмотрена математическая модель данной задачи для поиска объекта, находящегося в одной из  $n$  коробок, за  $k$  шагов, основанная на принципе оптимальности Беллмана и состоящая из  $k$  рекуррентных уравнений. После был реализован программный алгоритм решения данной задачи для случая  $n$  коробок и  $k$  шагов на языке программирования C#, после чего был произведен анализ некоторых решений.*

Поиск различных объектов издревле представляет собой одну из ключевых сторон человеческой активности. В работе [1] процесс поиска определяется как целенаправленное обследование конкретной области пространства для обнаружения находящегося там объекта. Обнаружением объекта можно считать получение информации о его местоположении путем установления с ним прямого энергетического контакта. Это вполне естественная проблема, с которой мы сталкиваемся на ежедневной основе. К примеру, перед тем как уходить утром на работу, необходимо собрать определенный набор вещей (ключи, кошелек, документы), которые в свою очередь необходимо локализовать. Их местоположение многообразно, и есть потребность свести количество времени, затраченное на поиск, к минимуму. Отходя от подобных бытовых проблем, можно расширить список задач до локализации поврежденных файлов компьютера, разведки месторождений нефти или поиска заблудившегося в лесу человека.

Одним из путей исследования поиска является построение и анализ математических моделей, отображающих объективные закономерности поиска и позволяющие установить связь между условиями его выполнения и его результатами, с целью дальнейшего анализа критериев эффективности поиска.

Полное и систематическое изложение теории решения поисковых задач было приведено в работах [2,4]. Следует заметить, что в мировой литературе по теории игр существует очень много работ в этой области прикладной математики, однако все еще остаются нерешенными задачи даже в самых простых случаях. И здесь вопрос связан со сложностью решения уравнения Беллмана для задач большой размерности.

В данной работе речь пойдет о многошаговой задаче поиска неподвижного пассивного объекта в дискретной среде, идеей для рассмотрения которой послужила статья [3]. Многошаговость задачи обусловлена повторяющейся процедурой поиска.

### Постановка задачи

Пусть дано дискретное множество местоположений объекта (в дальнейшем, коробка). Игрок  $H$  выбирает коробку и прячет в ней объект. Игрок  $S$  пытается обнаружить его. Событие, заключающееся в обнаружении объекта при про-

смотре верной коробки, не достоверное, т.е. объект может быть не найден, даже если он был в этой коробке. Каждый просмотр коробки требует затрат некоторых ресурсов (например, энергии или времени). Поиск продолжается до исчерпания числа попыток. При нахождении предмета игрок S вознаграждается. Игрок S стремится свести затраты своих ресурсов к минимуму.

В данной работе поставлены следующие задачи:

1. Составить теоретико-игровую модель рассматриваемой задачи с обучающимся ищущим, т.е. ищущий располагает информацией, в каких коробках уже был произведен поиск, и на основе этой информации осуществляет следующий шаг;
2. Обеспечить программную реализацию, способную решать данную задачу для k-шагового поиска объекта в N коробках;
3. Проанализировать решения некоторых задач.

### Построение модели

Игрок N выбирает одну из N коробок, пронумерованных от 1 до N, и прячет в ней объект. Игрок S осуществляет поиск объекта в одной из них. Каждый просмотр i-й коробки,  $i = 1, \dots, N$ , может быть осуществлен путем затрат ресурса  $t > 0$ . Также определим вероятность  $p_i, 0 < p_i \leq 1$ , обнаружить объект в коробке i, при условии, что он в ней находится. Если игрок S находит объект, он получает вознаграждение в виде величины  $a > 0$ .

Обозначим за  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  смешанную стратегию игрока N. Игрок S имеет представление о стратегии игрока N. Зная его, он стремится пройти через серию поисков с минимальными затратами. Обозначим за  $f_n(\mathbf{x})$  минимальные ожидаемые затраты игрока S на n-м шаге поиска и составим соответствующее нашим условиям уравнение Беллмана минимальных ожидаемых затрат  $f_n(\mathbf{x})$ :

$$f_n(\mathbf{x}) = \min_{1 \leq i \leq N} [t - ap_i x_i + (1 - p_i x_i) f_{n-1}(C_i(\mathbf{x}))], \quad (1)$$

где  $t > 0, 0 < p_i \leq 1, a > 0$  и  $C_i(\mathbf{x}) = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ .

Вектор  $C_i(\mathbf{x})$  отвечает за способность игрока S обучаться в процессе поиска. Осуществляя неудачный поиск в какой-либо коробке, игрок запоминает, что в этой коробке предмета найдено не было и, в связи с этим, меняет приоритеты поиска в сторону остальных коробок. Новые вероятности  $\xi_j$  определяются в соответствии со следующими формулами:

$$\xi_i = x_i \frac{1 - p_i}{1 - p_i x_i} \quad (2)$$

$$\xi_j = \frac{x_j}{1 - p_i x_i}, j \neq i$$

Строго говоря, вектор  $C_i(\mathbf{x})$  являет собой апостериорную вероятность распределения объекта по коробкам при условии, что был произведен неудачный просмотр i-й коробки. Иными словами, вероятность того, что объект находится в i-й коробке после произведенного в ней неудачного поиска, уменьшится, в то время как вероятности нахождения объекта в остальных коробках увеличатся.

Пользуясь уравнениями (1), (2) можно определить минимальные потери  $f_n(\mathbf{x})$  игрока S на шаге n, в том случае, если он производил поиски по оптимальной последовательности коробок  $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_n$ .

### Программная реализация

Программная реализация поставленной задачи была произведена при помощи языка программирования C#. Основную сложность в процессе реализации составила способность к обучению игрока S, т.е. изменение вектора  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  распределения объекта по коробкам в ходе игры. Вследствие этого возникает большое количество различных векторов  $C_i(\mathbf{x}) = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ . К примеру, в задаче поиска объекта среди трех коробок, уже на 3-м шаге будет 27 возможных вариантов выбора коробки (см. Рис. 1). В связи с этим, алгоритм программы оказался чрезвычайно ресурсоемким (запоминание и оперирование  $5 * \sum_{i=1}^n N^i$  количеством переменных), что сильно ограничивает класс доступных решению задач, ввиду недостаточной мощности ЭВМ, на которой производились вычисления.

На вход программы подаются значения: N — число коробок, n — число шагов, t — затраты ресурсов, a — выигрыш игрока S, вектор вероятностей p и вектор x. На выходе получаем значения оптимальных затрат  $f_n(\mathbf{x})$  и оптимальный путь поиска  $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_n$  по коробкам.

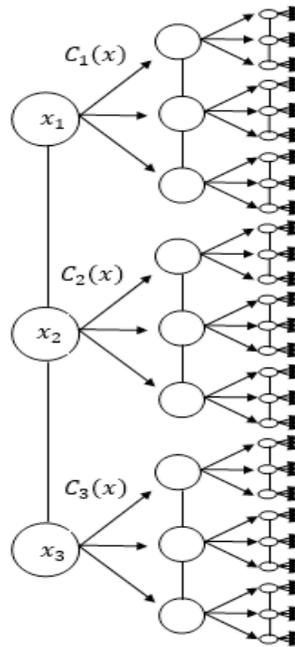


Рис. 1. Поиск среди 3-х коробок

**Анализ численных примеров**

**Пример 1**

Рассмотрим задачу за следующими условиями:

$$N = 5, n = 7, t = 5, a = 4, p = (0.62, 0.74, 0.75, 0.63, 0.69),$$

$$x = (0.23, 0.18, 0.17, 0.22, 0.2).$$

В результате работы программы получаем следующие значения:

$$f_7(x) = 17.81158,$$

**оптимальный путь поиска:**  $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ .

Произведем вычисления функции минимальных затрат для значений  $n = \overline{1,7}$  и рассмотрим зависимость прироста функции минимальных затрат от количества шагов игры. Результаты приведены в таблице 1. Как можно видеть, значения функции прироста являются убывающей последовательностью, что говорит о том, что функция минимальных затрат предположительно может быть ограничена сверху, т.е. затраты ресурсов, необходимых на поиск, могут быть ограничены. К сожалению, установить дальнейшее поведение последовательности прироста не удалось, ввиду невозможности решать данную задачу для большего числа шагов (т.к. ресурсоемкость алгоритма превысила имеющуюся). Из имеющихся данных можно выдвинуть два предположения:

1. Функция прироста стремится к нулю, т.е. функция минимальных затрат имеет предел сверху;
2. Функция прироста может принимать отрицательные значения, т.е. функция минимальных затрат начинает убывать после некоторого  $n$ .

**Пример 2**

Рассмотрим задачу за следующими условиями:

$$N = 5, n = 7, t = 5, a = 32, p = (0.62, 0.74, 0.75, 0.63, 0.69),$$

$$x = (0.23, 0.18, 0.17, 0.22, 0.2).$$

В результате работы программы получаем следующие значения:

$$f_7(x) = -4.17878,$$

**оптимальный путь поиска:**  $5 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ .

Отрицательные затраты на поиск будем называть выгодой игрока S. Аналогично примеру 1 произведем вычисления для  $n = \overline{1,7}$ . Из представленных результатов в таблице 2 можно сделать вывод о том, что игроку S выгодно искать объект дольше, т.к. его выгода от этого только лишь увеличится. Численно установить наличие ограниченности снизу у функции минимальных затрат не удалось ввиду превышения ресурсоемкости. Более того, функция прироста ведет себя неоднозначно (наличие скачков).

**Пример 3**

Рассмотрим задачу за следующими условиями:

Таблица 1. Результаты примера 1

$n$	$f_n(x)$	$f_n(x) - f_{n-1}(x)$
1	4.4296	-
2	8.1622	3.7326
3	11.2042	3.042
4	13.5754	2.3712
5	15.3034	1.728
6	16.68715	1.38375
7	17.81158	1.12443

Таблица 2. Результаты примера 2

$n$	$f_n(x)$	$f_n(x) - f_{n-1}(x)$
1	0.04368	-
2	0.2886	0.24492
3	-0.5334	-0.822
4	-1.8918	-1.3584
5	-3.7338	-1.842
6	-3.8673	-0.1335
7	-4.17878	-0.31148

$N = 6, n = 6, t = 4, \alpha = 2, p = (0.96, 0.98, 0.9, 0.01, 0.99, 0.95),$   
 $x = (0.01, 0.01, 0.01, 0.95, 0.01, 0.01).$

В результате работы программы получаем следующие значения:

$f_7(x) = 23.3006,$

оптимальный путь поиска:  $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 5.$

В данном примере игрок S знает, что объект наиболее вероятно расположен в 4-й коробке ( $x_4 = 0.95$ ), однако найти его там довольно сложно ( $p_4 = 0.01$ ). В результате видно, что игроку S выгодно совсем не обыскивать 4-ю коробку, а отдать предпочтения другим коробкам.

## Выводы

В результате анализа численных решений ряда задач были сделаны следующие выводы:

- Игроку S в процессе поисков порой выгодно вовсе игнорировать ту коробку, в которой объект наиболее вероятно находится;
- В данном классе задач существует подкласс, в котором игроку S выгодно искать объект как можно дольше, т.к. его выгода от этого только лишь увеличится. Численно установить наличие предела выгоды в подобных задачах не удалось ввиду недостатка ресурсоемкости ЭВМ;
- В данном классе задач существует подкласс, в котором прирост функции затрат игрока S с ростом шагов является убывающей последовательностью, т.е. затраты могут быть ограничены. Справедливость этого утверждения для большого числа шагов в данных задачах установить не удалось.

Литература:

1. Абчук, В. А., Суздаль В. Г. Поиск объектов. М.: Сов. радио, 1977. 336 с.
2. Петросян, Л. А, Гарнаев А. Ю. Игры поиска. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. 216 с.
3. Gal, S. A discrete search game // SIAM J. Appl. Math. 1974. Vol 27. No 4, P. 641–648.
4. Garnaev, A. Search Games and Other Applications of Game Theory. Heidelberg, N-Y.: Springer, 2000. 145 с.

## Ключевые аспекты имитационного моделирования сложных систем

Звягин Леонид Сергеевич, кандидат экономических наук, доцент  
 Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Финуниверситет), Financial University

*Имитационное моделирование сложных систем является одним из наиболее мощных средств исследования, в частности, сложных динамических систем. Как и любое моделирование, оно дает возможность проводить вычислительные эксперименты с еще только проектируемыми системами и изучать системы, натурные эксперименты с которыми, из-за соображений безопасности или дороговизны, не целесообразны. В тоже время, благодаря своей близости по форме к физическому моделированию, это метод исследования доступен более широкому кругу пользователей.*

**Ключевые слова:** системный метод, имитационная модель, сложная система, исследование сложных систем

## Key aspects of imitation modeling of complex systems

*Simulation of complex systems is one of the most powerful tools of research, particularly complex dynamical systems. As with any simulation, it gives the opportunity to conduct computational experiments with the designed systems and to study system field experiments which, for reasons of safety or high cost, is not advisable. At the same time, due to its proximity in form to physical modeling, this method of research available to a wider range of users.*

**Keywords:** system method, simulation model, complex system, the study of complex systems

Имитационное моделирование сложных систем — способ построения моделей таких систем, описывающих поведение процессов. Данную модель возможно реализовать любое число раз. В таком случае результаты будут обусловлены случайным характером процессов. Используя такие результаты возможно получить устойчивую статистику.

Имитационное моделирование сложных систем является частным случаем математического моделирования. Известны классы объектов, аналитические модели по которым не созданы, либо по таким классам не созданы методы решения исходной модели. При этом данная модель сменяется имитатором или имитационной моделью.

Имитационная модель является логико-математическим описанием объекта. Его используют для экспериментирования на персональных компьютерах при проектировании, анализе и оценке функционирования объектов.

### Сложная система и ее свойства

На данный момент термин “система” как научный термин является не полностью определенным. Однако, ученые уже влились в исследование сложных систем (СС).

Во множестве книг про системный анализ и системотехнику выделяются центральные свойства СС:

Целостность и делимость	СС рассматривают как единую совокупность элементов, которая характеризуется наличием значительного числа связанных и взаимодействующих друг с другом элементов. У специалиста, проводящего исследование, существуют субъективные возможности разбить систему на подсистемы, определить цели функционирования, которые подчиняются общей цели функционирования СС в целом. Это обусловлено целенаправленностью системы. Целенаправленность можно интерпретировать как свойство системы вести себя под воздействием случайных факторов и неопределенности так, чтобы достичь поставленную цель.
Связи	Связь — устойчивое существенное отношение между различными элементами, свойствами, которые бы превосходили по мощности связи анализируемых элементов и внешних (не входящих в СС). Также под “связью” можно понять наличие виртуального канала, используя который возможно осуществить обмен энергией, веществом, информацией между СС и внешней средой.
Организация	Свойство обусловлено определенной организацией (формирование существенных связей элементов, упорядоченное распределение связей и элементов). При определении связи формируется необходимая структура СС, свойства элемента же влияют на его функции. Зачастую определяют следующие свойства функции: Ее сложность; Возможность управлять разветвленной ИС и интенсивностью потоков информации; Возможность взаимодействия функции с внешней средой, функционировать при наличии вероятности неопределенности входного потока и возможных воздействий случайных факторов;

Интегративные качества	К интегрируемым качествам относятся свойства, присущие СС в целом, а не отдельно взятому элементу. Наличие таких качеств позволяет определить, что система зависит от таких качеств, но не подчинена им целиком.
------------------------	--

### Факторы, усложняющие исследование сложных систем

Можно привести огромное множество примеров СС в экономической сфере. Основными из них являются социально-экономические (для описания муниципальных объектов) и организационно-производственные (для описания работы предприятия, компании).

Исходя из этого, можно сделать вывод, что каждая СС является уникальной. Отличия в существующих аналогах значительны, следствием чего является необходимость строить все новые и новые модели.

На рынке труда ощущается нехватка специалистов по созданию СС. Это обусловлено слабой структурированностью теоретических и практических знаний по моделированию СС. Действительно, из-за уникальности изучаемых систем процесс накопления и систематизирования данных о них затруднен. Кроме того, идентифицируя элементы сложных систем возможно получить субъективные экспертные оценки. Это в свою очередь обусловлено слабопредсказуемостью и контринтуитивностью СС.

Многокритериальность оценки процесса, протекающего в системе, формирует многозначную оценку. Это диктуется следующими факторами:

- 1) Наличие значительного числа подсистем, имеющих свои цели;
- 2) Множественность показателей (иногда противоречивых);
- 3) Неформализуемость критериев, необходимых для принятия решения;

Рассмотренные свойства СС позволяют сделать главный методологический вывод: СС несводима к элементарной совокупности элементов. Следовательно, нет возможности провести исследование свойств системы путем ее членения.

Кроме того, многообразие природы и разнородность математических схем, описывающих динамику СС с учетом поведенческих аспектов, также заметно влияет на моделирование исходной системы. Это также предопределено случайностью и неопределенностью факторов, которые влияют на изучаемую СС, что заметно усложняет и увеличивает трудоемкость и времязатратность исследований.

Вышеперечисленные особенности исследований СС формируют необходимость в специализированных способах исследования моделей СС, так как традиционные модели использовать невозможно без специальных компьютерных технологий.

Предпосылки для имитационного моделирования сложной системы

Зачастую, при проведении исследования, специалист выбирает имитационный метод для изучения СС по нескольким причинам.

- 1) Нет возможности создать однозначно определенный список задач исследования.

Каждая группа разработчиков модели СС выбирает свой объект для исследования как совокупность базовых элементов. Каждая использует различные предположения о виде взаимодействия между элементами, различные критерия качества, описывающие функционирование модели, ставится различная цель для моделирования. Все это связано с мощностью имитационного моделирования, как инструмента создания модели.

- 2) Сложность и трудоемкость аналитического аппарата.

Существует огромное множество математических инструментов для описания различных элементов моделируемой системы. Среди них выделяют теорию массового обслуживания, конечно-разностные схемы, булеву алгебру, теорию графов. Но при моделировании в качестве входных данных поступает слишком большое количество входных исходных значений, что не позволяет однозначно считать конечное решение удовлетворительным.

- 3) Сложность наблюдения за динамикой компонентов в системе.

Специалисту зачастую не хватает усредненных оценок характеристик функционирования СС. Он также заинтересован в исследовании временной последовательности возникновения уязвимостей модели, их эффективного закрытия, внесения изменений в работу СС и так далее.

- 4) Отсутствие экономической целесообразности постановок натуральных экспериментов.

Любые исследования и манипуляции с СС приводят к экономическим затратам и являются дорогостоящими мероприятиями. Если изменение в работе реально действующего объекта окажется неудачным, это может привести к ущербу владельца объекта, социальной напряженности, экономическим потерям. Проектирование новой системы приведет также к большим затратам. Для того, чтобы их избежать, используют уже накопленный опыт специалистов данной области, избегая сотрудничество с научными коллективами. Также используют имитацию с целью провести предварительную проверку новой стратегии перед ее непосредственной реализацией.

- 5) Наличие необходимости в точном отображении функционирования компонентов системы.

Из-за наличия множества неизвестных для специалиста факторов, аналитическая модель считают не полностью соответствующей структуре СС. Из этого следует, что исследование ее работы в течении некоторого временного отрезка будет нуждаться в определенной аналитиче-

ской модели. Такую задачу имитационного моделирования возможно решить тривиально: сохраняя и восстанавливая промежуточное состояние системы «бэк-апом» (англ. «backup»).

6) Использование имитационной модели как тренажера.

Программа подготовки специалистов по принятию решений должна включать в себя часть, направленную на приобретение новых знаний и умений в управлении моделируемой системы.

Стоит отметить, что имитационное моделирование сложных систем имеет ряд затруднительных моментов. Так, например, разработать качественную имитационную модель может обойтись компании дороже, чем создать аналитическую модель. Кроме того, она будет

нуждаться в квалифицированных специалистах и значительных временных затратах. Зачастую, даже кажущаяся качественной имитационная модель, может оказаться моделью, которая не будет отображать реальное положение дел. Это может быть связано как с некачественным ее выполнением, так и особенностями имитации. При проведении имитационного моделирования необходимо использовать нестандартные методы анализа данных, что значительно усложнит процесс.

Описанные выше проблемы являются небольшой частью преград, которые встречает специалист при создании программно-технологического инструментария, который позволит автоматизировать этапы построения имитационной модели и ускорит их исследование.

### Признаки сложной системы

СС формально являются иерархическими, включая в себя взаимосвязанные подсистемы. Подсистемы можно разделить на подсистемы и так далее, вплоть до базового уровня.	С помощью данного признака возможно при разложении на иерархическую структуру понять и описать СС и их составные части. Важно понимать тот факт, что архитектура СС формируется из базовых компонентов, их иерархических связей (отношений). Именно эти отношения в большой степени формируют свойства, особенности исследуемой системы.
Определение простейших элементов основывается на субъективном выборе исследователя.	Так низкий уровень значимости элемента может оказаться высоким для другого. Это обусловлено несколькими факторами: Перед моделями стоят различные задачи. В этом случае субъективность выбора стоит рассматривать как положительный фактор, так как исследование (при его верной реализации) позволит получить оптимальную модель. Данный выбор производится исходя из навыков исследователя. Тогда субъективность является отрицательным фактором и, возможно, приведет к ошибочной модели и задача не будет выполнена. Ученые называют иерархические системы разложимыми, если существует возможность их разделения на однозначно идентифицируемые части. Почти разложимыми являются системы при наличии абсолютно независимых элементов.
Внутрикомпонентная связь зачастую более выражена, сравнивая со связью между различными компонентами.	Во-первых, это позволяет сформировать два класса взаимодействия между компонентами: группы высокочастотных и низкочастотных по динамике взаимодействий. Во-вторых, данное различие внутрикомпонентных и межкомпонентных взаимодействий делит функции между частями системы, давая возможность, хоть и не абсолютно, но все-таки изолировать различные части.
Иерархические системы формируются множеством подсистем, составленными с помощью различных комбинаций и организаций.	Различные СС включают схожие структурные части. Они, в свою очередь, используют базовые компоненты и (или) структуры. Как правило, данное устройство формируется исходя из экономических идей (используются наименее затратные элементы по стоимости, времени, занимаемой площади и так далее).
Любая функционирующая СС представляет собой результат оптимизации ранее созданной простой системы. Сформированная с нуля СС не сможет функционировать.	Во время развития СС ее элементы, с начала рассматривавшиеся как сложные, становятся элементарными для последующего строения СС. Сегодня не существует возможности моментально создать необходимый элементарный элемент, так как его природные свойства (базовые) могут не подойти для моделирования необходимой СС и придется их менять.

### Примеры моделирование сложных систем

Пример 1. Рассмотрим простейший пример: физическую систему с определенным телом массы  $m$ , которое

скатывается по наклонной плоскости с заданным ускорением  $a$ , под воздействием силы  $F$ .

Исследуя такую систему, Ньютон смог получить математическое отношение:  $F = m \cdot a$ . Это — простейший

пример физико-математической модели системы или математической модели физической системы.

Пример 2.

Обозначим анализируемый объект за  $s$ , который бы обладал определенными свойствами. Для исследования не имеет значение его внутреннее строение. Так, например, машина не будет являться элементом для моделирования разгона, однако будет являться для моделирования дорожного трафика.

Символом  $l$  обозначим связь (процесс взаимодействия) между элементами системы, которая бы являлась значимой для исследования.

Система  $S$  является совокупностью элементов с множеством связей, для которой определена цель функционирования  $F$ .

Сложной является система, включающая в себя разнотипные элементы с разнотипными связями.

Система является большой, если она состоит из значительного числа схожих элементов с схожими связями.

Таким образом, система математически представима в общем виде:  $S = \{\{s\}, \{l\}, F\}$

СС при наличии влияния технических средств  $St$  и действий человека представим автоматизированной системой  $SA$ , общий вид которой:

$$S_A = \{\{s_T\}, \{s_H\}, \{s_O\}, \{l\}, F\}$$

где  $s_O$  — не использованные ранее элементы СС.

Структура системы определяется при декомпозиции (разбиении) ее на множество не изменяющиеся во времени элементов или их групп, с последующим определением их связи.

Стоит отметить, что на практике большинство систем рассматривают как функционирующие во времени, поэтому стоит определить их динамические характеристики.

Состояние обусловлено характеристиками элементов системы, которые изменяются во времени и являются важными для цели ее функционирования.

Процессом (динамикой) является множество изменяющихся во времени значимых состояний системы.

Цель функционирования есть задача получения желаемого состояния системы. Достижение цели обычно влечет целенаправленное вмешательство в процесс функционирования системы, которое называется управлением.

Пусть  $T = [t_0, t_1]$  есть временной интервал моделирования системы  $S$  (интервал модельного времени). Построение модели начинается с определения параметров

и переменных, определяющих процесс функционирования системы.

Параметры системы  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  — это характеристики системы, остающиеся постоянными на всем интервале  $T$ .

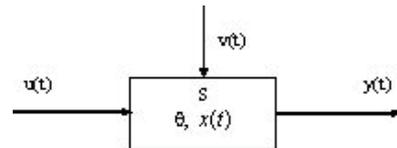
Переменные бывают зависимые и независимые. Независимые переменные есть, как правило, входные воздействия (в том числе управляющие)  $u = u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t)) \in U \subseteq R^n$  ими могут быть также воздействия внешней среды.

Последовательность изменения  $x(t)$  при  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$  называется фазовой траекторией системы, где  $X$  — пространство состояний или фазовое пространство.

Последовательность изменения  $y(t)$  называется выходной траекторией системы. Зависимые переменные есть выходные характеристики (сигналы)

$$y = y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) \in Y \subseteq R^m$$

Общая схема математической модели (ММ) функционирования системы может быть представлена в виде:



Множество переменных вместе с законами функционирования

$$x(t) = \dots,$$

$$y(t) = \dots$$

называется математической моделью системы. Если  $t$  непрерывно, то модель называется непрерывной, иначе — дискретной:  $(t = i \cdot \Delta, i = 1, 2, \dots)$ .

Метод имитационного моделирования сложных систем позволяет решать задачи анализа больших систем  $S$ , включая задачи оценки: вариантов структуры системы, эффективности различных алгоритмов управления системой, влияния изменения различных параметров системы. Имитационное моделирование может быть также положено в основу структурного, алгоритмического синтеза больших систем, когда требуется создать систему, с заданными характеристиками при определенных ограничениях, которая является оптимальной по некоторым критериям оценки эффективности.

Литература:

1. Понятие сложной системы [Электронный ресурс] — URL <http://www.rae.ru/monographs/189-5948>
2. Нейросетевые модели сложных систем [Электронный ресурс] — URL <http://www.intuit.ru/studies/courses/2257/141/lecture/20587>
3. Баканов, М. И., Мельник М. В., Шеремет А. Д. Теория экономического анализа. — М.: Финансы и статистика, 2005,
4. Лотов, А. В. Введение в экономико-математическое моделирование. — М.: Наука, 2008.
5. Годин, В. В. Информационное обеспечение управленческой деятельности / В. В. Годин, И. К. Корнеев. — М.: Мастерство, Высшая школа, 2001;

## Расчет напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки по заданным перемещениям

Кабриц Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент;  
Еременко Владимир Романович, студент;  
Ма-ю-шан Владислав Витальевич, студент  
Санкт-Петербургский государственный университет

Ложкин Егор Николаевич, начальник технического отдела  
ООО «ЭНТЭ» (г. Санкт-Петербург)

*Рассматривается модельная задача о НДС (напряженно-деформированное состояние) цилиндрической оболочки при вертикальной нагрузке, возникающей при заданных жестких смещениях ряда поперечных сечений цилиндра. Подобная задача возникает при проверке состояния газопровода по измеренным перемещениям в некоторых сечениях трубы. На основе линейной теории оболочек исследуется НДС от действия различных вариантов нагрузок, обеспечивающих одни и те же заданные перемещения. Соответствующие линейные одномерные краевые задачи решаются численно. Как известно, в подобных задачах присутствует значительный краевой эффект, поэтому для решения используется метод ортогональной прогонки Годунова, который обеспечивает получение численного решения с приемлемой точностью.*

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, деформация, напряжение, перемещение, ортогональная прогонка.

Роль трубопроводного транспорта в системе нефтегазовой отрасли очень высока, поскольку он является одним из недорогих видов транспортировки нефти. Помимо энергетического обеспечения страны, трубопроводы позволяют уменьшить нагрузку на железнодорожный транспорт.

Магистральные трубопроводы состоят из нескольких основных элементов, функционирование каждого из которых необходимо для продолжения транспортировки. Однако анализ надежности и систематизация произошедших аварий показывают, что наибольшее влияние на надежность конструкции оказывают её прямолинейные участки. В связи с этим, важным становится повышение надежности линейной части на всех этапах создания трубопровода. Также важно адекватно оценить влияние внешних нагрузок на конструкции, то есть необходимо исследовать конструкцию на надежность при помощи анализа НДС трубопровода.

Расчет НДС предполагает знание всех нагрузок, действующих на трубопровод. Эти нагрузки меняются в процессе многолетней эксплуатации трубопровода. Причинами изменения нагрузок являются подвижки грунта, коррозионные повреждения трубопровода [10] и т.п. Одним из способов контроля деформации трубопровода является периодическая геодезическая съемка, которая позволяет определить смещения контрольных точек по сравнению с предыдущим положением.

Необходимо определить изменение НДС фрагмента трубопровода по вертикальным смещениям, полученным посредством геодезической съемки. Тонкостенность рассматриваемого объекта позволяет в качестве математической модели использовать линейную теорию тонких цилиндрических оболочек [9,13].

Проблемам нелинейного деформирования оболочек посвящена работа [5]. Разработанные методы решения краевых задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений можно использовать и при решении различных задач в технике, биологии, медицине, экономике и других областях [1,3,4,8,11,12].

### Система уравнений для определения НДС цилиндрической оболочки

Обычно решение задач для цилиндрических оболочек ищут в виде тригонометрических рядов по круговой координате [7,9].

$$\begin{aligned} \{T_1, T_2, M_1, M_2\} &= \{T_{1,k}(s), T_{2,k}(s), M_{1,k}(s), M_{2,k}(s)\} \cos k\varphi \\ \{u_r, u_z, \vartheta_1, q_1, q_n\} &= \{u_{r,k}(s), u_{z,k}(s), \vartheta_{1,k}(s), q_{1,k}(s), q_{n,k}(s)\} \cos k\varphi \\ \{S, H, u_2, \vartheta_2, q_2\} &= \{S_{,k}(s), H_{,k}(s), u_{2,k}(s), \vartheta_{2,k}(s), q_{2,k}(s)\} \sin k\varphi \end{aligned} \tag{1}$$

Для определения коэффициентов рядов (1) при  $k=1$  используется система дифференциальных уравнений следующего вида [6,7]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_x}{ds} &= \pi R(q_{21} - q_{n1}), & \text{где} \\
 \frac{dM_y}{ds} &= F_x + \pi R^2 q_{11}, & \alpha_1 = \frac{(\pi(BR^2 + D)(\nu^2 - 1))}{\pi R^2}, \alpha_2 = -\frac{\nu}{\pi R^2}, \\
 \frac{dQ_{12,1}}{ds} &= -\alpha_1 \epsilon_{2,1} - \alpha_2 M_y - Rq_{2,1}, & \alpha_3 = \frac{4D + BR^2}{4DR + B\pi R^3}, \alpha_4 = \frac{\pi BR}{4D + B\pi R^2}, \\
 \frac{dM_{1,1}}{ds} &= \alpha_3 F_x + \alpha_4 Q_{12,1} + \alpha_5 \kappa_{\tau\nu,1}, & \alpha_5 = \frac{2\pi BD(\nu - 1)}{4D + B\pi R^2}, \alpha_6 = \frac{D - BR^2}{DBR^2}, \\
 \frac{d\kappa_{\tau\nu,1}}{ds} &= \alpha_6 M_{1,1} + \alpha_7 M_y, & \alpha_7 = -\frac{1}{B\pi R^3}, \alpha_8 = \frac{BR}{4D + BR^2}, \\
 \frac{du_{r,1}}{ds} &= -\vartheta_{1,1}, & \alpha_9 = -\frac{2}{(\nu - 1)(4D + BR^2)}, \\
 \frac{d\vartheta_{1,1}}{ds} &= \frac{M_{1,1}}{D} - \frac{\nu \epsilon_{2,1}}{R}, & B = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \\
 \frac{d\epsilon_{2,1}}{ds} &= \alpha_8 \kappa_{\tau\nu,1} + \alpha_9 Q_{12,1},
 \end{aligned} \tag{2}$$

$E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $h$  — толщина оболочки,  $D$  — цилиндрическая жесткость,  $B$  — жесткость на растяжение.

**Формулирование краевой задачи**

Введем обозначения  $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8)$ , где

$$V_1 = F_x, V_2 = M_y, V_3 = Q_{12,1}, V_4 = M_{1,1}, V_5 = \kappa_{\tau\nu,1}, V_6 = u_{r,1}, V_7 = \vartheta_{1,1}, V_8 = \epsilon_{2,1}$$

Систему дифференциальных уравнений (2) можно представить в виде:

$$\frac{d\mathbf{V}(s)}{ds} = \mathbf{A}\mathbf{V}(s) + \mathbf{F} \sum_{i=1}^m p_i L_i(s) \tag{3}$$

с граничными условиями

$$\mathbf{G}_1 \mathbf{V}(s_0) = 0, \mathbf{G}_2 \mathbf{V}(s_1) = 0 \tag{4}$$

$\mathbf{G}_i, i = 1, 2$  — прямоугольные матрицы следующего вида

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в данном случае постоянной толщины,  $\mathbf{A}$  — постоянная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_4 & 0 & \alpha_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_7 & 0 & \alpha_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{D} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu}{R} \\ 0 & 0 & \alpha_9 & 0 & \alpha_8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В (3) функция  $L_i(s)$  — меняется в зависимости, от способа приложения силы.

Для случая сосредоточенной нагрузки

$$L_i(s) = \delta(s - s_i)$$

При использовании интерполяционного полинома Лагранжа

$$L_i(s) = \prod_{j=0, j \neq i}^m \frac{s - s_j}{s_i - s_j}$$

Требуется проинтегрировать систему (3) с граничными условиями (4). Для решения поставленной задачи используется численный метод ортогональной прогонки Годунова [2].

**Алгоритм расчета нагрузок по заданным перемещениям**

При единичных нагрузках ( $p_i = 1, p_j \neq 0, i = 1..3, j \neq i$ ), решается система (3) с граничными условиями (4). На каждом  $i$ -ом шаге получается вектор перемещений  $q_i$  с компонентами

$$q_{ik} = V_6(s_k) - \frac{V_8(s_k)}{2} = u_{r,1}(s_k) - \frac{\epsilon_{2,1}(s_k)}{2}$$

$s_k$  — координата, в которой известно перемещение ( $k = 1, 2, 3$ ). Из векторов-строк  $q_i$  формируется матрица податливости  $Q = (q_1, q_2, q_3)^T$ .

Вектор заданных смещений  $u$  и матрица податливости  $Q$  позволяют найти значения параметров нагружения  $p_i$ . Для этого необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:  $Qp = u$ . Полученные  $p_i$  используются при решении системы (3).

Расчет проводился для прямолинейного участка трубопровода длины  $\tilde{l} = \frac{l}{R} = 45.1022$ . Величины с тильдой — записаны в безразмерном виде. Вертикальные перемещения поперечного сечения трубопровода были измерены в трех точках ( $\tilde{s} = \frac{s}{R}, \tilde{u} = \frac{u}{R}$ )

$$\tilde{s}_1 = 7.75, \tilde{s}_2 = 22.83, \tilde{s}_3 = 36.65; \tilde{u}_1 = -0.05, \tilde{u}_2 = 0.035, \tilde{u}_3 = -0.085. \tag{5}$$

$\tilde{u}_i$  — перемещение трубопровода в точке  $\tilde{s}_i$ . Эти точки отмечены на графике перемещений вдоль трубопровода, рис. 1, цифрами 1, 2 и 3 соответственно.

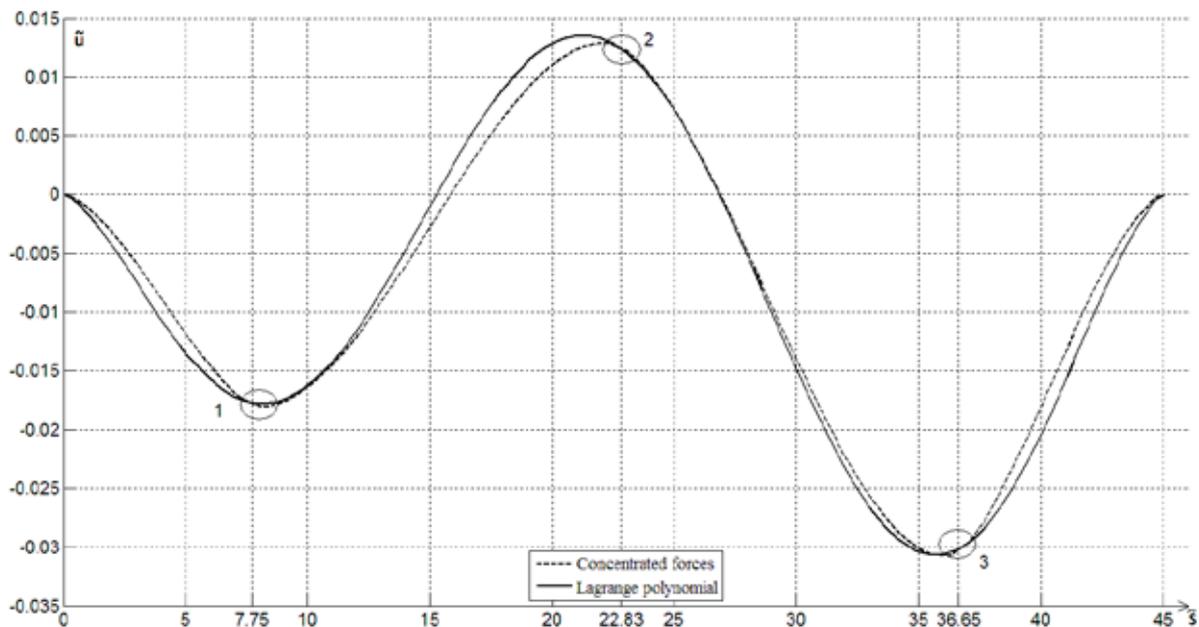


Рис. 1. График полученных перемещений

Значения нагрузок, которые обеспечивают перемещения (5):

1) в случае сосредоточенных нагрузок  $\tilde{p} = \frac{p}{ER}$ :

$$\tilde{p}_1 = -0.595 \cdot 10^{-5}, \tilde{p}_2 = 0.452 \cdot 10^{-5}, \tilde{p}_3 = -0.780 \cdot 10^{-5}$$

2) в случае интерполяции полиномом Лагранжа  $\tilde{p} = \frac{p}{E}$ :  
 $\tilde{p}_1 = -0.257 \cdot 10^{-5}, \tilde{p}_2 = 0.165 \cdot 10^{-5}, \tilde{p}_3 = -0.289 \cdot 10^{-5}$

Используя полученные  $p$ , находим НДС трубопровода в двух случаях нагружения.

Программа тестировалась на задаче, рассмотренной в работе [7] (случай сосредоточенных нагрузок (А)) результаты совпали.

Усилия  $T$  и моменты  $M$  определяются по следующим формулам

$$T_1 = \left( \frac{M_{1,1}}{\pi R} - M_{1,1} \right) / R, M_1 = M_{1,1},$$

$$T_2 = \nu M_1 + B(1 - \nu^2)\epsilon_{2,1}, M_2 = \nu M_1 + D(1 - \nu^2)\epsilon_{2,1}.$$

Безразмерные тангенциальные и максимальные изгибные напряжения определяются по формулам:

$$\tilde{\sigma}_{\tau_i} = \frac{T_i}{Eh}, \tilde{\sigma}_{M_i} = \frac{6M_i}{Eh^2}$$

### Анализ полученных результатов

Для того чтобы оценить напряжение по сравнению с максимально допустимым, необходимо построить графики напряжений на внешней и внутренней поверхностях трубопровода, для всех случаев нагружения. Так же построим на графике предельные значения напряжений для данного материала обозначим их пунктирными линиями.

Модуль юнга  $E = 206000$  МПа, максимально допустимое напряжение  $R_{max} = 563$  МПа, безразмерная величина максимально допустимого напряжения:

$$\tilde{\sigma}_{max} = \frac{R_{max}}{E} = 0.00273$$

Формулы для расчета осевых безразмерных напряжений.

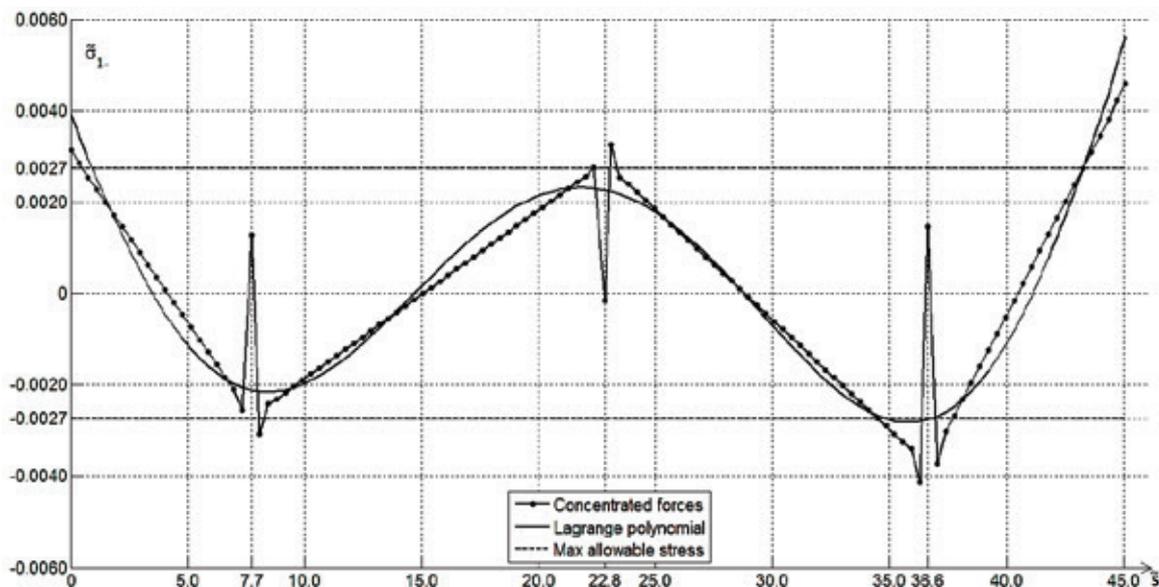


Рис. 2. График осевых напряжений на внутренней поверхности трубы

Из графиков 2, 3 видно, что в зависимости от способа нагружения получаются разные результаты. Так график напряжений от действия сосредоточенных нагрузок, выходит за пределы максимально допустимого напряжения во всех местах приложения силы. График от действия распределенных, полиномом Лагранжа, нагрузок, ведет себя гораздо лучше, оставаясь в пределах допустимого. Только в точке с координатой 36.65 видны выходы за пределы максимально допустимого напряжения в обоих случаях нагружения, здесь возможно повреждение трубопровода.

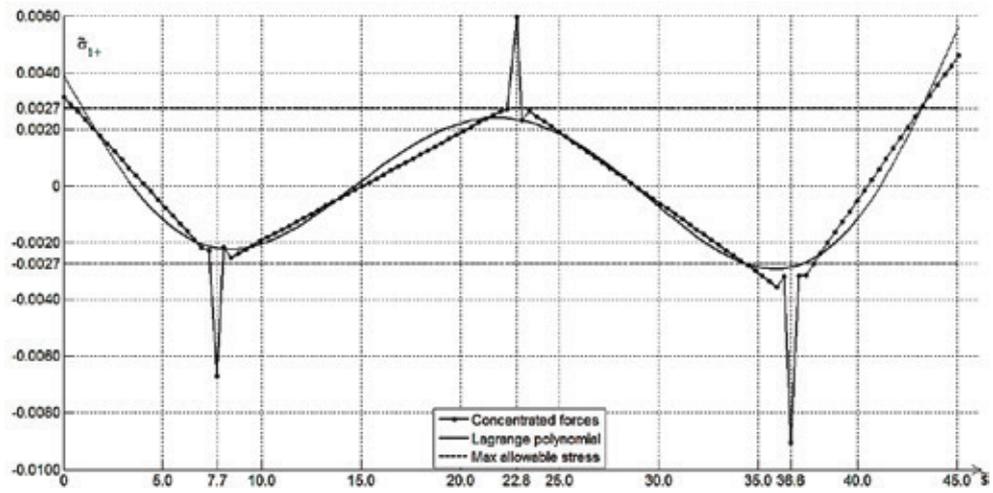


Рис. 3. График осевых напряжений на внешней поверхности трубы

Формулы для расчета окружных безразмерных напряжений

$$\tilde{\sigma}_{2-} = \tilde{\sigma}_{T_2} - \tilde{\sigma}_{M_2}, \tilde{\sigma}_{2+} = \tilde{\sigma}_{T_2} + \tilde{\sigma}_{M_2}$$

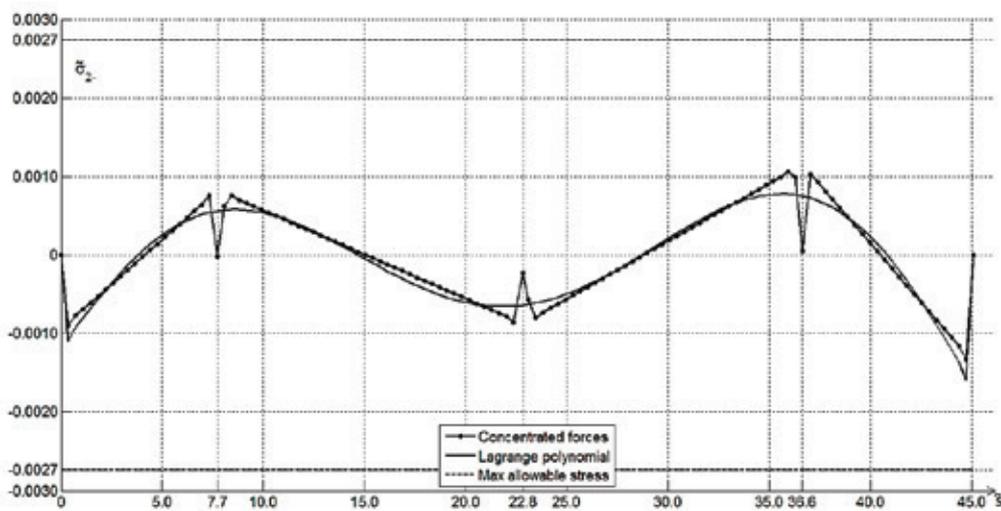


Рис. 4. График окружных напряжений на внутренней поверхности трубы

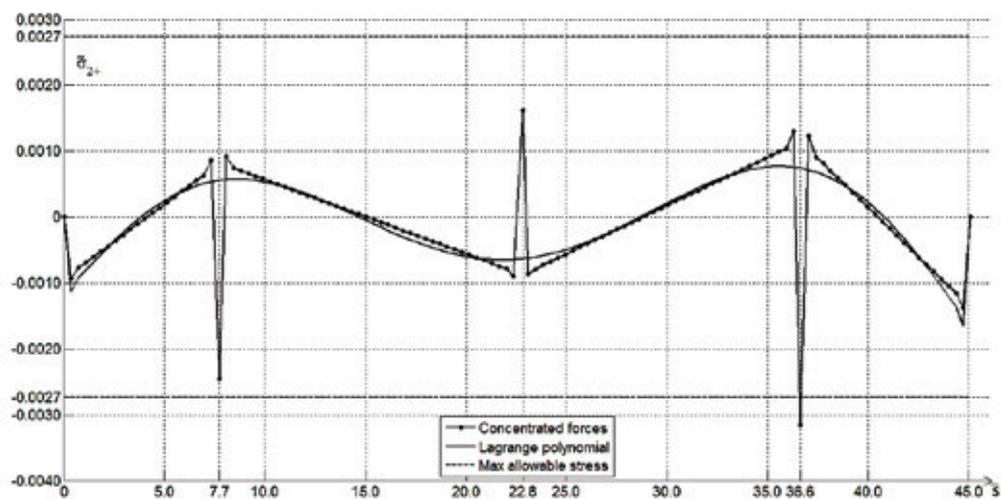


Рис. 5. График окружных напряжений на внешней поверхности трубы

На графиках, рис. 4,5 видно, что значения окружных напряжений меньше меридиональных и не выходят за пределы максимально допустимых, кроме случая сосредоточенных нагрузок в точке с координатой 36.65 на внешней поверхности трубы.

### Заключение

Разработана методика расчета изменения НДС фрагмента трубопровода по измеренным вертикальным смещениям в некоторых точках. Построен алгоритм определения параметров нагружения, обеспечивающих измеренные перемещения во фрагменте трубопровода. Определено НДС для двух способов нагружения «жесткого» (сосредоточенные нагрузки в точках снятия перемещений) и «мягкого» (непрерывно распределенная нагрузка).

### Литература:

1. Гасратова, Н. А., Бойцов Д. С., Габриелян Л. А., Тюганова Т. М. Математическая модель иммунного ответа организма млекопитающих на поражение кожи ожогом // Молодой ученый. 2014. № 12. с. 1–7.
2. Годунов, С. К. Метод ортогональной прогонки для решения систем разностных уравнений // Журнал Вычислительной математики и математической физики, 1962. Т. 2. № 6. с. 972–982.
3. Горыня, Е. В., Колпак Е. П. Математические модели поиска экологической ниши. В сборнике: Устойчивость и процессы управления Материалы III международной конференции. 2015. с. 469–470.
4. Dal' Yu.M., Pronina Yu.G. On concentrated forces and moments in an elastic half-plane. Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 1998. № 1. с. 57–60.
5. Кабриц, С. А., Мальков В. М., Мансурова С. Е. Нелинейные уравнения плоского слоя для трех моделей эластомерного материала Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2001. № 1. с. 38.
6. Кабриц, С. А., Шамина В. А. Изгиб оболочки вращения поперечной силой и моментом // Вестник. СПбГУ, 2014. с. 261–269.
7. Kabrits, S. A., Shamina V. A. Cylindrical shell under the action of the ring load // Seventh Polyakhov's Reading, 2015 International conference on Mechanics, 2015. — P. 1–3.
8. Колпак, Е. П., Горыня Е. В., Селицкая Е. А. О моделях А. Д. Базыкина «хищник — жертва». Молодой ученый. 2016. № 2 (106). с. 12–20.
9. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
10. Пронина, Ю. Г. Оценка устойчивости упругой трубы под давлением коррозионных сред. Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. № 3. с. 55–63.
11. Pronina, Y. G. Study of possible void nucleation and growth in solids in the framework of the Davis-Nadai deformation theory. Mechanics of Solids. 2014. Т. 49. № 3. с. 302–313.
12. Pronina, Y. G. Analytical solution for decelerated mechanochemical corrosion of pressurized elastic-perfectly plastic thick-walled spheres. Corrosion Science. 2015. Т. 90. с. 161–167.
13. Черных, К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч.1,2. Л.: Изд-во Ленинградского Университета. Ч.1, 1962. 272с. Ч.2, 1964. 395 с.

## Инновационный метод обучения высшей математике студентов, обучающихся по специальности «Информационные технологии»

Кутлимурад Дильмурод Собирович, ассистент, преподаватель;  
Менглиев Давлатёр Бахтиярович, студент  
Ташкентский университет информационных технологий, Ургенчский филиал

*В данной статье рассматривается новый, инновационный метод преподавания высшей и дискретной математики студентам вузов технического направления, в частности направлениям информационных технологий, а также выявление педагогических проблем и их решение.*

**Ключевые слова:** профессиональная подготовка, логика, нестандартность, мышление, информационные технологии, современные педагогические проблемы

*This article describes a new, innovative method of teaching higher and discrete mathematics to students of universities and technical direction, in particular the areas of information technology, as well as identifying educational problems and their solutions.*

**Keywords:** *training, logic, originality, thinking, information technology, modern educational problems*

Математика, великая, никогда не увядающая наука. Она окружает человека с древнейших времен и по сей день. С древних времен математика «вбирала» в себя многолетний опыт научно-учебных работ, исследований и разработке новых формул. Роль этой дисциплины была разной в каждом из периодов. Если внимательно присмотреться то, именно благодаря математическому складу ума (мышлению и навыкам) человечество не только научилось решать задачи арифметического характера, но и хорошо улучшила «гибкость» своего умения принимать быстрые и моментальные решения в любой жизненной ситуации. Развитие науки, техники, мысли — основа технического прогресса любой страны. А математика как наука, является одним из ключевых «элементов» этого прогресса.

В современном мире, в условиях информационной среды (ведь мы живем в веке информационных технологий) всё большую актуальность приобретают качество образования, в частности и высшего. Подготовка высококвалифицированных кадров в области информационных технологий зависит от множества показателей, в том числе и от качества математического образования. Конечно же, основным «рулём» управления качеством является государственная образовательная программа высшего образования (ГОП ВО), [1] в особенности по направлению «Информационных технологий», в частности специальностей 5330200 — Информатика и информационная технология (в промышленном производстве), 5330500 — Компьютерная инженерия, 5330600 — Программная инженерия, 5350100 — Телекоммуникационные технологии, 5350200 — Телевизионные технологии, 5350300 — Экономика и менеджмент в сфере информационно-коммуникационных технологий, 5350400 — Профессиональное образование в сфере ИКТ, 5350500 — Технология почтовой связи, 5350600 — Информатизация и библиотековедение. [2]

В такой «тесной» взаимосвязи специальностей «Информационных технологий» нуждаются в том, чтобы в их учебную программу дисциплины математика содержались не только традиционные разделы высшей математики (матрицы, линейная алгебра, ряды, элементы высшей алгебры, элементы векторной алгебры и аналитической геометрии, дифференциальное и интегральное исчисление, предел и действительные функции, теорию вероятностей и мат. анализ но и прикладные (производственное пространство, основы модульной арифметики, и др.).

Именно здесь, на первых порах знакомства с высшей математикой (в 1–3 (4) семестрах) которые как правило, изучают без ориентации на специальность, многие преподаватели стремятся обучать учащихся «минимальной» учебной программой. Поскольку профессиональные дисциплины

в это время еще не введены в учебный план или только начинают рассматриваться студентами, следовательно, обучение математике должно быть «классическим», а прикладные разделы должны изучаться отдельно на старших курсах. Очевидно, что при такой организации обучения оказываются недостаточно сформированными интеграционные навыки в переносе знаний из одной науки в другую (трансфер), умения составлять и анализировать математические модели информационных явлений и процессов.

Необходимо помнить о том, что обучение высшей математике должно быть непрерывным в течение всего периода обучения в вузе, ведь именно тогда «повышаются» перспективы для дальнейшего их умственного развития и формирования у них профессиональной компетентности, т.е. должно включать в себя:

- математическое моделирование, которую можно проводить как компонент — самостоятельно в рамках ВУЗа или же в учебном плане дисциплины математика.

- фундаментальный (базовый) курс высшей математики, в котором будет «включено» обязательно рассмотрение управления политикой информационных технологий, использования теории вероятностей (математического) для обнаружения информационных рисков.

- изучение студентами самостоятельно прикладных методов математики в рамках курсовых или факультативов по их собственному выбору.

Обычно, большинство студентов знают о таком «понятии» как «числовые характеристики дискретных случайных величин» (среднее квадратическое отклонение, математическое ожидание, дисперсию и др), но не каждый догадывается использовать их на занятиях по предметам «ООП», «Информационная безопасность» др. для расчета количественной оценки алгоритма своей программы. Вся «соль» в том, что количество тренировочных задач во время изучения той или иной темы не включались упражнения прикладного характера. Необходимо постоянно поддерживать стремление учащихся к немедленной отдаче, действию, «творчеству» (широкое, нестандартное мышление). [2]

В результате студент неверно решает отдельные задачи данного типа либо не догадывается применить к ним известный ему способ решения (ошибочно обобщенная ассоциация). Чтобы исключить это, необходимо в систему тренировочных заданий включать задачи прикладного характера.

Так, при изучении темы «Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса» ведущее место должны занимать задачи прикладного характера, например, такие как «На веб-сервер производится три независимых DDoS-атаки. Ве-

роятность удачной 1-й атаки равна 0,4, 2-й — 0,5, 3-ей — 0,7. Для вывода веб-сервера из строя достаточно 3-х удачных атак. При 2-х удачных атаках сервер выходит из строя с вероятностью 0,6; при удачной одной атаке сервер выходит из строя с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что в результате 3-х атак веб-сервер будет выведен из строя?» Благодаря использованию таких заданий студент имеет возможность увидеть прямую взаимосвязь изучаемого материала с его практическим применением. [3]

Вместе с тем, наряду с традиционными для вузов формами обучения (лекциями, практическими занятиями) стоит также ввести в учебные планы практикумы математического моделирования, которое обязательно следует проходить в специальных кабинетах оборудованные компьютерами. Из всего многообразия программных средств необходимо выделить для использования на компьютерных практикумах по математическим учебным дисциплинам следующие группы программных средств:

- математические пакеты (MatLab, MathCAD, Maple и др.);
- статистические пакеты (Статистика 5.0, STADIA и др.).

Выше указанные программы являются удобным «инструментарием» для решения различных прикладных задач. Так, учащиеся приобретают опыт, необходимый для выполнения математических расчетов, анализа, практикума в целом, а также рутинные или несущественные (в контексте изучаемого материала) операции, студенты за считанные минуты проводят сложные, громоздкие вычисления, решают содержательные задачи, моделируют различные ситуации.

Также неоспоримым преимуществом использования этих программных средств является возможность визуализации всех этапов решения поставленной задачи. Компьютерный практикум позволит студентам наглядно увидеть связь математики с компьютерной безопасностью (что чрезвычайно важно для студентов, особенно на первых курсах, о чем уже говорилось выше), а также оценить значительные преимущества использования компьютерных технологий в решении математических и профессиональных задач.

#### Литература:

1. Основные требования к образовательным программам высшего образования установлены Постановлением Кабинета Министров Республики Узбекистан от 16 августа 2011 года за № 343 «Об утверждении государственных образовательных стандартов высшего образования».
2. «Высшая математика». Конспект лекций, часть I. Саидов Ю.Р., Юсупов Ш.Б. — Факультет «Информационные технологии».
3. Д. Тожибава, А. Йолдошев. Методика обучения специальных предметов. Изд.. «Aloqachi» 2009 г.
4. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики, учебное пособие для студента, 1979 г. «Высшая школа» — 3 изд.

Благодаря лабораторным работам, студенты смогут «реализовать», попробовать свои практические умения и навыки из полученных теоретических знаний на лекциях. На лабораторных занятиях при помощи компьютерного практикума математического моделирования (в среде MathCad или MatLab) эффективно автоматизируются трудоемкие вычислительные преобразования, и внимание студента нацеливается, прежде всего, на процесс решения содержательных задач. Например, на лабораторном занятии «Активизация знаний о числовых характеристиках случайной величины» студентам предлагаются такие задачи: Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $M(X)$ , которая представляет собой площадь боковой поверхности тетраэдра с ребром  $X$ , для случайной величины  $P$ , распределенной равномерно на промежутке. [4]

Система практических и лабораторных занятий как основной и эффективный компонент процесса обучения имеет особую значимость, так как она в первую очередь формирует прикладную направленность обучения высшей математике, а затем уже организует деятельность преподавания и учения. Кроме того, сам процесс работы в такой «среде» зарождаёт интерес у учащихся к решению (созданию) чего-то нового. Ибо такие программные пакеты позволяют наглядно демонстрировать модель или конструкцию любого математического объекта, без какого-либо затруднения.

Предложенная структура обучения будущих специалистов по защите информации высшей математике соответствует ГОП ВО, однако говорить о ее эффективности можно при заинтересованности со стороны не только преподавателей математических дисциплин, но и соответствующих инстанций (образовательных ведомств, вузов, специальных кафедр).

В заключение хотелось бы отметить, что подобный подход в изучении высшей математики, используя математические пакеты — это действительно инновационная, бурно развивающаяся в настоящее время методика «современной» математики. О некоторых из них мы рассказали вкратце в настоящей статье.

## Решение задачи для нормы функционала погрешности интерполяционной формулы в пространстве $\tilde{L}_2^{(m)}(0,1)$

Маматова Нилуфар Хусеновна, кандидат физико-математических наук, доцент;  
Норова Мунира, студент  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Предположим, что во множестве действительных чисел функция  $\varphi(x)$  имеет локально суммируемые производные порядка  $m$ , а также для интервала  $[0,1]$  интеграл  $\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx$  ограничен. Положим, что функция  $\varphi(x)$  является периодической.

В пространстве  $\tilde{L}_2^{(m)}(0,1)$  рассмотрим интерполяционную формулу вида

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{k=1}^N C_k(x) \cdot \varphi(x_k). \tag{1}$$

Здесь  $x_k \in [0,1]$  и параметры  $C_k(x)$  соответственно называются узлами и коэффициентами интерполяционной формулы (1).

Разность  $\varphi - P_\varphi$  называется погрешностью интерполяционной формулы (1). Значение этой погрешности в некоторой точке  $z$  является линейным функционалом на функциях  $\varphi$ , т. е.

$$\begin{aligned} (\ell, \varphi) &\equiv \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{k=1}^N C_k(z) \cdot \varphi(x_k) = \\ &= \int_0^1 \left[ \delta(x-z) - \sum_{k=1}^N C_k(z) \delta(x-x_k) \right] * \phi_0(x) \varphi(x) dx, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака,  $\phi_0(x) = \sum_{\beta} \delta(x-\beta)$ ; здесь  $\beta$  принимает все целые значения и

$$\ell = \left( \delta(x-z) - \sum_{k=1}^N C_k(z) \delta(x-x_k) \right) * \phi_0(x) \tag{3}$$

является функционалом погрешности интерполяционной формулы (1) и принадлежит пространству  $\tilde{L}_2^{(m)*}(0,1)$ .

Пространство  $\tilde{L}_2^{(m)*}(0,1)$  состоит из всех периодических функционалов (3), которые ортогональны к единице. На основании неравенства Коши-Шварца погрешность (2) формулы (1) оценивается с помощью нормы функционала погрешности (3). Следовательно, оценка погрешности интерполяционной формулы (1) на функциях пространства  $\tilde{L}_2^{(m)}(0,1)$  приводится к нахождению нормы функционала погрешности  $\ell$  в сопряженном пространстве  $\tilde{L}_2^{(m)*}(0,1)$ .

Таким образом, отсюда мы получаем первую задачу.

**Задача 1.** Найти норму функционала погрешности  $\ell$  интерполяционной формулы (1) в пространстве  $\tilde{L}_2^{(m)*}(0,1)$ .

В этой задаче для экстремальной функции имеет место следующая

**Теорема 1.** Явное выражение для экстремальной функции  $\psi_\ell(x)$  функционала погрешности (3) определяется формулой

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \left[ B_{2m}(x-z) - \sum_{k=1}^N C_k(z) \cdot B_{2m}(x-x_k) + d_0 \right], \tag{4}$$

где  $B_{2m}(x) = \sum_{\beta \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i \beta x)}{(2\pi i \beta)^{2m}}$  является полиномом Бернулли,  $d_0$  — константа.

**Доказательство.** Используем формулы преобразования Фурье, данный в [17]

$$F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i p x) \cdot \varphi(x) dx,$$

$$F^{-1}[\varphi(p)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi i p x) \cdot \varphi(p) dp.$$

Свертка двух функций определяется формулой

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cdot g(y) dx.$$

Применяя к обеим частям равенства (4) преобразование Фурье и используя известные формулы (см. [17])  $F[\delta(x-z)] = e^{2\pi iz}$ ,

$$F[\phi_0(x)] = \phi_0(p),$$

получаем

$$(2\pi ip)^{2m} F[\psi_\ell(x)] = (-1)^m \left[ \exp(2\pi ipz) - \sum_{k=1}^N C_k(z) \exp(2\pi ipx_k) \right] \phi_0(p). \tag{5}$$

Равенства (5) равна нулю в начале координат. Следовательно, обе части уравнения (5) делятся на  $(2\pi ip)^{2m}$ .

Функция  $F[\psi_\ell(x)]$  определяется из (5) до выражения

$$(-1)^m d_0 \delta(p) + \sum_{\alpha=1}^{2m-1} d_\alpha D^\alpha \delta(p).$$

Таким образом, из (5) имеем

$$F[\psi_\ell(x)] = (-1)^m d_0 \delta(p) + \frac{\exp(2\pi ipz) \phi_0(p)}{(2\pi p)^{2m}} - \frac{\sum_{k=1}^N C_k(z) \exp(2\pi ipx_k) \phi_0(p)}{(2\pi p)^{2m}}.$$

Отсюда, с учетом

$$\phi_0(p) = \sum_{\beta} \delta(p-\beta) \text{ и } f(p)\delta(p-a) = f(a)\delta(p-a)$$

получаем

$$\begin{aligned} \psi_\ell(x) &= (-1)^m d_0 F^{-1}[\delta(p)] + \sum_{\beta \neq 0} \frac{\exp(2\pi i\beta z)}{(2\pi\beta)^{2m}} F^{-1}[\delta(p-\beta)] - \sum_{k=1}^N C_k(z) \sum_{\beta \neq 0} \frac{\exp(2\pi i\beta x_k)}{(2\pi\beta)^{2m}} F^{-1}[\delta(p-\beta)] = \\ &= (-1)^m \left[ d_0 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i\beta(x-z))}{(2\pi i\beta)^{2m}} - \sum_{k=1}^N C_k(z) \sum_{\beta \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i\beta(x-x_k))}{(2\pi i\beta)^{2m}} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, используя определение полинома Бернулли  $B_{2m}(x)$ , получим (4).

Теорема 1 доказана.

Литература:

1. Соболев, С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974. — 808 с.
2. Соболев, С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. — 484 с.

## Суперэйлеровость графов и стягиваемость

Маркова Наталья Александровна, студент  
Санкт-Петербургский государственный университет

Цель данной статьи — проиллюстрировать на примерах основные определения и результаты из [1]. Основная задача, рассматриваемая в [1] — является ли граф суперэйлеровым, т.е., по определению, содержит ли граф остовный эйлеров подграф.

За  $V(G)$  далее обозначается множество вершин графа  $G$ . За  $E(G)$  — множество рёбер графа  $G$ . За  $deg_G(v)$  — степень вершины  $v$  в графе  $G$ .

Понятие суперэйлеровости будет рассмотрено через понятие стягиваемых подграфов: если  $H$  — стягиваемый подграф  $G$ , тогда суперэйлеровость  $G$  равносильна суперэйлеровости  $G/H$ . Это сужает проблему суперэйлеровых графов.

Итак, введём понятие стягиваемого подграфа. Подграф  $H$  графа  $G$  называется *стягиваемым* (collapsible), если для любого чётного подмножества его вершин  $X \subseteq V(H)$   $H$  содержит связный подграф, множество вершин с нечетными степенями которого есть  $X$ .

### Пример (стягиваемого подграфа)

Рассмотрим граф  $G = C_3$ . Пусть  $H = G$  (рис. 1). Любое чётное подмножество его вершин  $X \subseteq V(H)$  — это либо пустое множество, либо две соседние вершины (рис. 2). Содержит ли  $H$  связный подграф, множество

вершин с нечётными степенями которого есть  $X$ ? Да, содержит — соответствующий подграф выделен на рис 3. Следовательно, рассмотренный пример представляет собой пример стягиваемого подграфа.

**Пример (нестягиваемого подграфа)**

Приведём пример нестягиваемого подграфа, что проиллюстрирует существенность введённого определения. Пусть снова  $H = G$  (рис. 4). Возьмем чётное подмножество вершин  $X$  (рис. 5), для которого не найдется в  $H$  связного подграфа, множество вершин с нечетными степенями которого есть  $X$ . Чтобы попасть в вершину  $v$  необходимо пройти по угловой вершине, но степень этой вершины будет четной (рис. 6). Значит, она не попала бы в  $X$ .

Введем определение  $S$ -подграфа. Для чётного подмножества вершин  $S \subseteq V(G)$   **$S$ -подграфом** графа  $G$  называется подграф  $\Gamma$  такой, что  $G - E(\Gamma)$  связан, и  $S$  состоит из таких вершин  $G$ , степень которых в  $\Gamma$  нечётна.

Запишем кратко все условия, за выполнением которых необходимо следить при работе с этим определением:

$$S \subseteq V(G) : |S| : 2,$$

$$G - E(\Gamma) \text{ связан,}$$

$$S = \{v \in V(G) | deg_{\Gamma}(v) \text{ not } : 2\}.$$

Пример  $S$ -подграфа приведён на рис. 3. Здесь  $S := X$ .

Если для любого чётного подмножества  $S \subseteq V(G)$  граф  $G$  имеет  $S$ -подграф, то  $G$  называют **стягиваемым**. И это определение согласуется с определением стягиваемого подграфа, которое было дано выше.

Граф называется **суперэйлеровым**, если он содержит остовный (т.е. содержащий все вершины) эйлеров (т.е. содержащий замкнутый путь, проходящий через каждое ребро графа ровно по одному разу) подграф.

Заметим, что из стягиваемости следует эйлеровость. Достаточно в определении  $S$ -подграфа взять  $S := \emptyset$ , т.к.

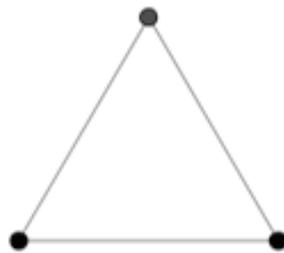


Рис. 1.  $H = G = C_3$

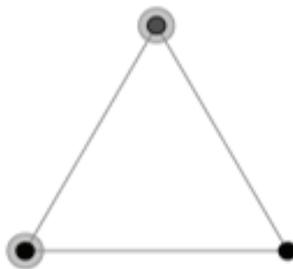


Рис. 2.  $X$

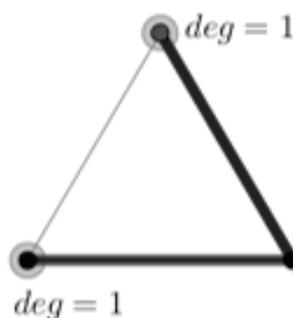


Рис. 3

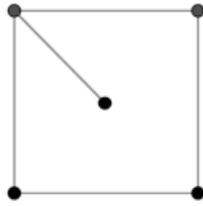


Рис. 4.  $H = G$

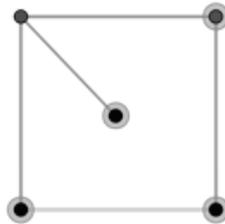


Рис. 5.  $X$

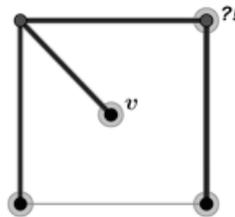


Рис. 6

из этого будет следовать, что граф связан, а степени всех его вершин чётны, из чего следует эйлеровость графа.

**Утверждение.** Граф  $G$  является суперэйлеровым тогда и только тогда, когда  $G$  содержит  $R$ -подграф. Где  $R$  — это множество таких вершин  $G$ , степень которых в  $G$  нечетна, т.е.  $R = \{v \in V(G) | deg_G(v) \text{ not } : 2\}$ .

**Пример (иллюстрирующий утверждение)**

Рассмотрим граф  $G$  — рис 7. Следуя утверждению, выделяем все вершины в  $G$ , степень которых нечетна (рис. 8). Получаем множество  $R$ . Далее находим  $R$ -подграф  $\Gamma$  графа  $G$ . Он изображён на рис 9. Видим, что  $G - E(\Gamma)$  (рис. 10) и есть остовный эйлеров подграф графа  $G$ , что и влечёт суперэйлеровость  $G$ .

**Теорема 1**

Пусть  $G$  — граф и  $S \subseteq V(G)$ . Если  $G$  содержит остовное дерево  $T$  такое, что все компоненты  $G - E(T)$  имеют равное количество вершин в  $S$ , то  $G$  имеет  $S$ -подграф.

**Пример (иллюстрирующий теорему 1)**

Рассмотри граф  $G$  из предыдущего примера (рис.7). Уже известно, что этот граф имеет  $R$ -подграф, значит

есть возможность найти остовное дерево  $T$  из условия теоремы. Такое дерево изображено на рис. 11. При этом  $G - E(T)$  связан, а значит имеет единственную компоненту. Следовательно, условие теоремы выполнено, значит  $G$  имеет  $R$ -подграф, который мы уже предъявили на рис. 9.

**Теорема 2**

- a.  $G$  содержит два рёберно непересекающихся остовных дерева.
  - b.  $G$  стягиваемый.
  - c.  $G$  суперэйлеров.
- Теорема утверждает, что  $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ .

**Пример (иллюстрирующий теорему 2)**

Теорема 2 представляет собой признак, по которому можно сделать вывод о суперэйлеровости графа — требуется в графе найти два рёберно непересекающихся остовных дерева. Рассмотрим граф из предыдущего примера. Первое остовное дерево  $T$  представлено на рис. 11. На рис. 12 представлено ещё одно остовное дерево  $T'$ . Заметим, что приведённые деревья не пересекаются по рёбрам, из чего, согласно теореме 2, вновь можно сделать вывод о суперэйлеровости рассматриваемого графа.

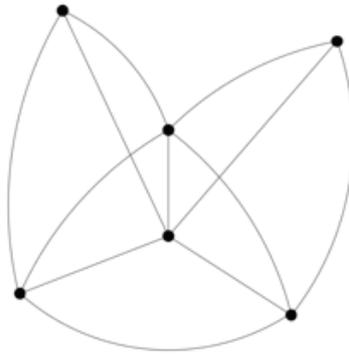


Рис. 7.  $G$

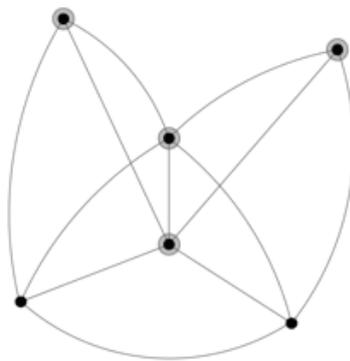


Рис. 8.  $R$

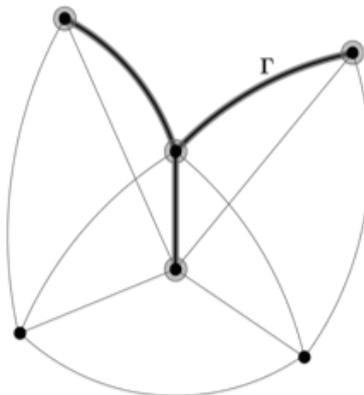


Рис. 9.  $\Gamma$  —  $R$ -подграф

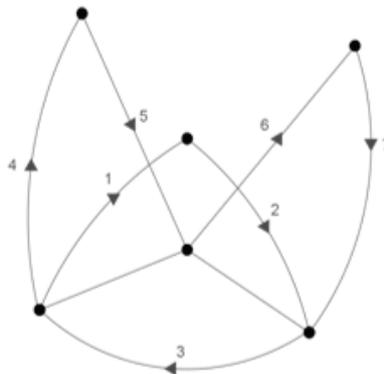


Рис. 10.  $G - E(\Gamma)$

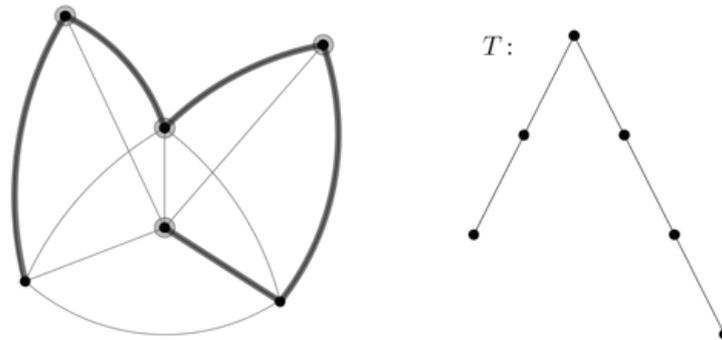


Рис. 11. Остовное дерево  $T$

Пусть  $G$  — граф,  $H$  — его подграф, а  $S$  — чётное подмножество  $V(G)$ . Пусть  $H'$  — остовный подграф  $G$  такой, что  $E(H) = E(H')$ . Тогда *сужением  $G/H$*  называется граф, вершины которого — это компоненты  $H'$ . При этом отдельные вершины  $G/H$  инцидентны такому же числу рёбер, как соответствующие компоненты  $H'$  в  $G$ .

Определим  $S/H$  как подмножество, состоящее из тех вершин  $G/H$ , которые соответствуют компонентам остовного подграфа  $H'$  с нечётным числом вершин в  $S$ .

Рассмотрим введённые определения и обозначения на примере.

**Пример**

Рассмотрим граф  $G$  (рис. 13) и его подграф  $H$  (рис. 14). Далее нужен остовный подграф  $H'$  такой, что  $E(H) = E(H')$ . Дополним подграф  $H$  двумя вершинами и получим  $H'$  (рис. 15).

Рассмотрим компоненты  $H'$  (выделены пунктиром на рис. 16). И то, как они связаны в графе  $G$  (рис. 17).

Получим сужение  $G/H$  (рис. 18).

Теперь разберём понятие  $S/H$ . Возьмём чётное подмножество  $S$  вершин в  $G$ . Рассмотрим число вершин в компонентах  $H'$ . Выделим из них те компоненты, у которых число вершин в  $S$  нечётно. Получаем искомое  $S/H$  (рис. 19).

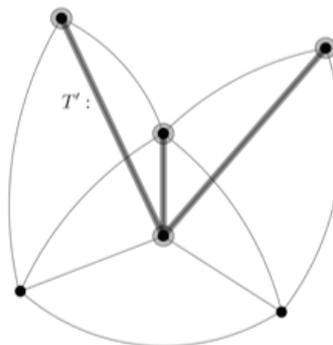


Рис. 12. Остовное дерево  $T'$

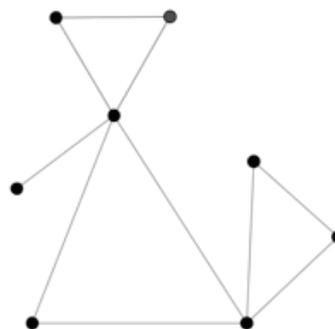


Рис. 13.  $G$

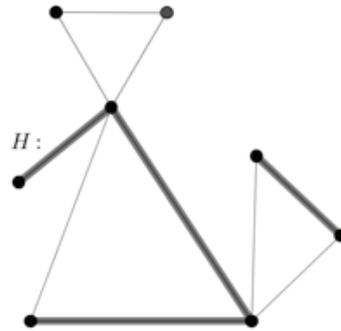


Рис. 14.  $H$

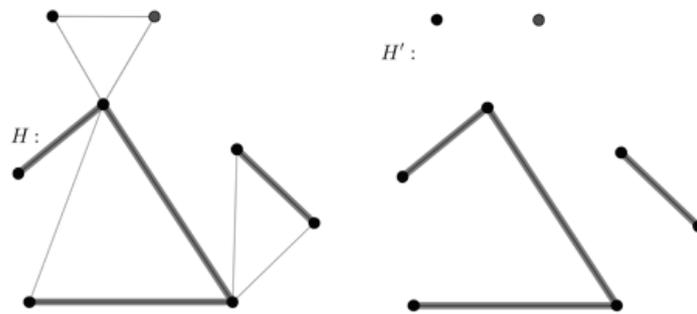


Рис. 15.  $H'$

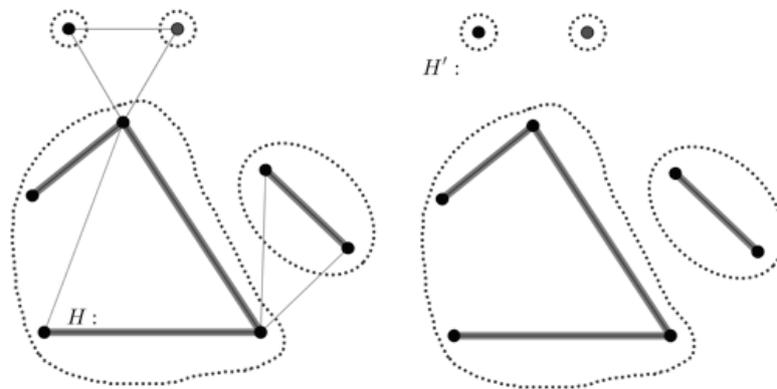


Рис. 16. Компоненты  $H'$

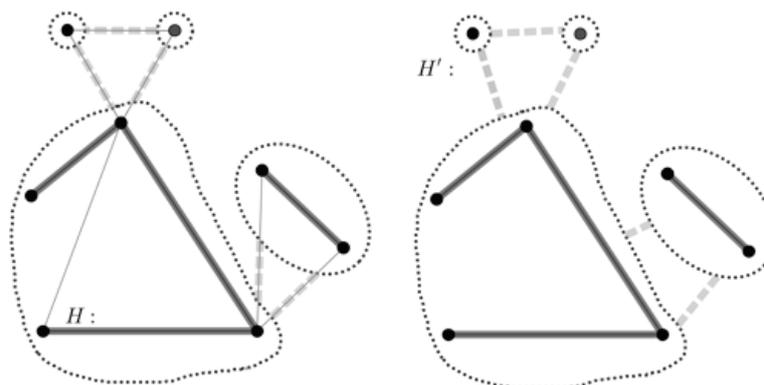


Рис. 17. Связь компонент  $H'$

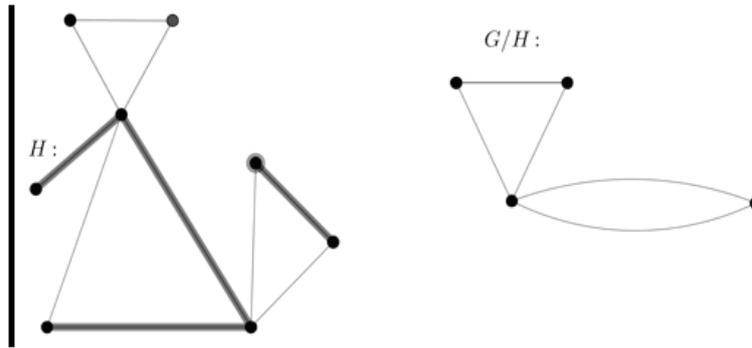


Рис. 18. Сужение  $G/H$

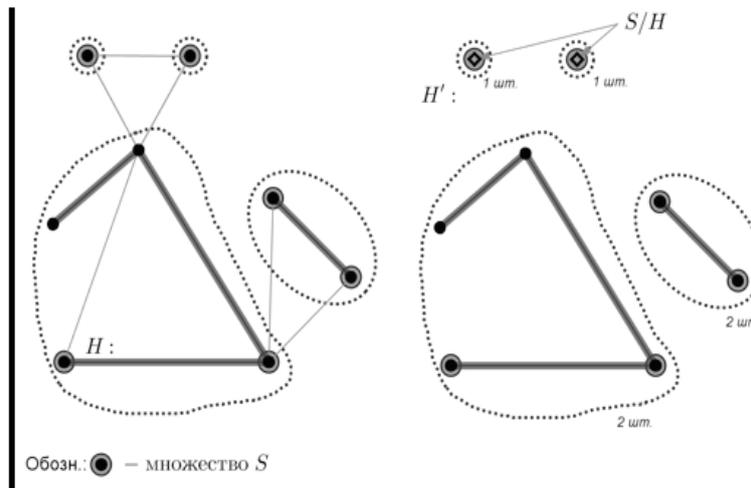


Рис. 19. Сужение  $S/H$

**Теорема 3**

- a.  $G$  имеет  $S$ -подграф.
- b.  $G/H$  имеет  $(S/H)$ -подграф.

Пусть  $H$  — связный подграф  $G$ , и пусть  $S \subseteq V(G)$ . Тогда  $(a) \Rightarrow (b)$ .

Если ещё  $H$  стягиваемый, то  $(b) \Rightarrow (a)$ .

**Следствие**

Если  $H$  стягиваемый подграф  $G$ , то  $G$  суперэйлеров тогда и только тогда, когда  $G/H$  суперэйлеров.

Литература:

1. Р. А. Catlin. Supereulerian graphs, collapsible graphs, and four-cycles // Congressus Numerantium 58 (1987), pp. 233–246.

**Поиск допустимого управления в задаче стабилизации**

Медведев Кирилл Сергеевич, студент;  
 Голубев Руслан Игоревич, студент  
 Санкт-Петербургский государственный университет

В данной работе приведен алгоритм построения стабилизирующего управления для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием в управлении и найден критерий существования такого управления.

**Ключевые слова:** управление, запаздывание, дифференциальные уравнения с запаздыванием, устойчивость

Дифференциальные уравнения с запаздыванием в управлении возникают при решении различных экономических и технических задач. В данной работе рассматривается линейная система с запаздыванием в управлении. Основной целью работы является построение стабилизирующего управления и нахождение критериев его существования.

**Задача построения стабилизирующего управления**

Рассмотрим линейную систему с запаздыванием в управлении:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t - h), \tag{1}$$

где  $h > 0$  — запаздывание, матрицы  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ . Предположим также, что пара матриц  $(A, B)$  — полностью управляема. Требуется выбрать управление таким образом, чтобы замкнутая система оказалась асимптотически устойчивой. В [1] было предложено выбирать управление в виде

$$u(t) = Kx(t + h, t, x(t)).$$

В момент  $t$ , когда определяется управление, значение  $x(t + h)$  ещё неизвестно. Из (1) получим, что

$$\begin{aligned} x(t, t_0, x_0) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(t + \tau)d\tau, \\ u(t) &= K\left(e^{Ah}x(t) + \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)}Bu(\tau - h)d\tau\right) = \\ &= K\left(e^{Ah}x(t) + \int_{-h}^0 e^{-A\xi}Bu(t + \xi)d\xi\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Построенное таким образом управление (2) является хорошим, поскольку зависит только от  $x(t)$  и от значений  $u(t)$  на интервале  $[t - h, t]$ , т.е. не требует от нас знания будущих состояний системы.

Проверим, что замкнутая система (1) — (2) устойчива, то есть все корни её характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. Для этого умножим

$$\det \begin{pmatrix} sE - A & -Be^{-sh} \\ -Ke^{Ah} & E - K \int_{-h}^0 e^{-A\xi}Be^{s\xi}d\xi \end{pmatrix}$$

на

$$\det \begin{pmatrix} E & (sE - A)^{-1}Be^{-sh} \\ 0 & E \end{pmatrix} = 1$$

и в результате получим

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} sE - A & 0 \\ -Ke^{Ah} & E - K(sE - A)^{-1}B \end{pmatrix} &= \det(sE - A) \det(E - K(sE - A)^{-1}B) = \\ &= \det \begin{pmatrix} sE - A & B \\ K & E \end{pmatrix} = \det(sE - A - BK). \end{aligned}$$

В силу сделанного предположения о полной управляемости пары матриц  $(A, B)$  найдётся стабилизирующее систему управление. Следует отметить, что выбранное управления обеспечивает конечный спектр замкнутой системы (1) — (2), несмотря на наличие запаздывания в системе (1).

Непосредственное использование управления (2) затруднено необходимостью вычисления интеграла

$$z(t) = \int_t^{t+h} e^{A(t+h-\tau)}Bu(\tau - h)d\tau.$$

Продифференцировав данное соотношение, получим дифференциальное уравнение, решение которого позволяет находить  $u(t)$ . Однако, как было замечено в [1], это приводит к появлению в системе дополнительного уравнения для  $\square$  ( $\square$ ), которое в отдельности является неустойчивым (если исходная система неустойчива). Более того, полученная таким образом система

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t-h), \\ \frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + Bu(t) - e^{Ah}Bu(t-h), \\ u(t) = Ke^{Ah}x(t) + Kz(t), \end{cases}$$

оказывается неустойчивой даже для стабилизирующего управления. В самом деле, умножив характеристическую матрицу

$$\begin{pmatrix} sE - A & 0 & -Be^{-sh} \\ 0 & sE - A & -B + e^{-(sE-A)h}B \\ -Ke^{Ah} & -K & E \end{pmatrix}$$

последовательно на

$$\begin{pmatrix} E & 0 & (sE - A)^{-1}Be^{-sh} \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & -(sE - A)^{-1}e^{-(sE-A)h}B \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

получим

$$\begin{pmatrix} sE - A & 0 & 0 \\ 0 & sE - A & -B \\ -Ke^{Ah} & -K & E \end{pmatrix}$$

откуда характеристическая функция имеет вид

$$\det(sE - A) \det \begin{pmatrix} sE - A & -B \\ -K & E \end{pmatrix} = \det(sE - A) \det(sE - A - BK).$$

Поэтому, в [1] было рекомендовано аппроксимировать интеграл квадратурной формулой:

$$u(t) = Ke^{Ah}x(t) + K \sum_{i=1}^n A_i^{(n)} e^{-Ax_i^{(n)}} Bu(t + x_i^{(n)}). \tag{3}$$

Таким образом получим новую замкнутую систему (1) — (3). Можно проверить, что её спектр, в отличие от исходной системы, бесконечен. Для некоторых значениях параметров  $A, B, h, K$  устойчивость системы (1) — (3) не достигается ни при каком количестве узлов  $\square$ .

**Поиск допустимых значений коэффициента в выражении для стабилизирующего управления**

Далее для простоты расчетов будем рассматривать скалярный случай, то есть  $A = a \in R^{1 \times 1}, B = b \in R^{1 \times 1}, K = k \in R^{1 \times 1}$ . Для устойчивости системы (1) — (2) необходимо, чтобы уравнение внутренней динамики управления:

$$u(t) = kb \int_{-h}^0 e^{-a\xi} u(t + \xi) d\xi \tag{4}$$

оказалось устойчивым. Это означает, что уравнение

$$1 - kb \int_{-h}^0 e^{(s-a)\xi} d\xi = 0$$

имеет только такие решения  $s \in C$ , что  $Re(s) < 0$ , где  $Re(s)$  — вещественная часть комплексного числа  $s$ . С учётом того, что

$$\left| kb \int_{-h}^0 e^{(s-a)\xi} d\xi \right| \leq |kb| \int_{-h}^0 e^{-a\xi} e^{Re(s)\xi} d\xi \leq |kb| \int_{-h}^0 \square^{-a\xi} d\xi,$$

если  $Re(s) \geq 0$ , то для устойчивости (4) достаточно, чтобы было выполнено следующее условие:

$$|kb| \int_{-h}^0 e^{-a\xi} d\xi = |kb| \frac{e^{ah} - 1}{a} < 1$$

Учитывая вышесказанное, параметр  $\square$  управления (3) будем выбирать из следующих условий:

$$\begin{cases} |kb| \frac{e^{ah} - 1}{a} < 1 \\ a + kb < 0, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} \frac{-a}{e^{ah} - 1} < kb < \frac{a}{e^{ah} - 1} \\ kb < -a, \end{cases}$$

ввиду того, что  $\frac{(e^{ah} - 1)}{a} > 0$  для всех  $a$ . Так как  $\forall a \in R$

$$-a < \frac{a}{e^{ah} - 1},$$

то получаем условие

$$\frac{-a}{e^{ah} - 1} < kb < -a.$$

Множество  $\{k\}$ , удовлетворяющих условию, будет непусто, если

$$\frac{-a}{e^{ah} - 1} < -a$$

или, что то же самое,

$$a < \frac{\ln 2}{h}$$

Область, соответствующая допустим значениям  $a$  и  $kb$ , приведена на рис. 1.

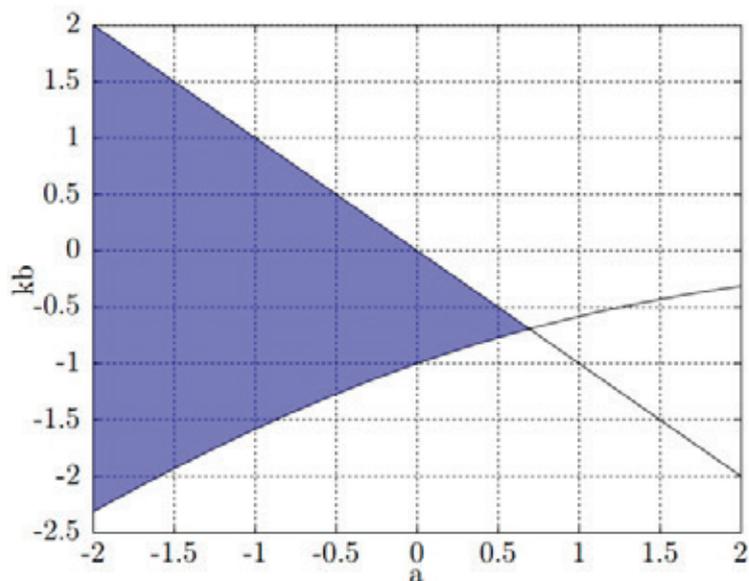


Рис. 1. Возможные значения kb для h=1

**Заключение**

В данной работе предложен алгоритм построения стабилизирующего управления на основе метода компенсации запаздывания. Кроме того был найден критерий существования стабилизирующего управления для случая когда матричные коэффициенты являются скалярами. Очевидно, что для скалярного случая существование стабилизирующего управления не зависит от величины b.

Литература:

1. Manitius, A., Olbrot A. W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // Automatic Control, IEEE Transactions on, 1979. № 24 (4). P. 541–552.
2. Michiels, W., S. Mondíe, D. Roose. Finite Spectrum Assignment of Unstable Time-Delay Systems With a Safe Implementation // Automatic Control, IEEE Transactions on, 2003. № 12. P. 2207–2212

## Априорная оценка для решения первой краевой задачи для уравнения смешанного типа

Меражова Шахло Бердиевна, старший преподаватель;  
Маматова Нилуфар Хусеновна, кандидат физико-математических наук, доцент  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

В области  $D = \{(x, t) : 0 < x < l, -T < t < T\}$  рассмотрим следующее уравнение:

$$Lu \equiv K(t) \cdot u_{tt} - h(x) \cdot u_{xx} + a(x, t) \cdot u_t + b(x, t) \cdot u_x + c(x, t) \cdot u = f(x, t). \quad (1)$$

через  $L$  мы обозначим линейный, дифференциальный оператор с частными производными второго порядка:

$$L \equiv K(t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - h(x) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} + b(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + c(x, t).$$

Здесь  $K(t)$ ,  $h(x)$ ,  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$  — заданные функции, которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $K(t) \in C^2([-T, T])$ ,  $t \cdot K(t) > 0$  при  $t \neq 0$  и  $K(0) = 0$ .
- 2)  $h(x) \in C^2([0, l])$ , если  $x \in (0, l)$ , то  $h(x) > 0$  и  $h(0) = h(l) = 0$ .
- 3)  $a(x, t)$ ,  $b(x, t) \in C^1(\bar{D})$ ,  $c(x, t) \in C(\bar{D})$ .
- 4)  $\beta(x) = a(x, 0) - K_t(0) > 0$ ,  $x \in [0, l]$ .

$C$  — пространство непрерывных функций,  $\bar{D}$  — замыкание  $D$ . Область  $D$  разделим на три части:

$$D = D^+ \cup D^- \cup \{t = 0\}$$

Здесь  $D^+ = D \cap \{t > 0\} = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ ,

$$D^- = D \cap \{t < 0\} = \{(x, t) : 0 < x < l, -T < t < 0\},$$

$\Gamma = \partial D$  - граница области  $D$ .

$\bar{n} = (n_x, n_t)$  — внутренняя нормаль, проведенной к  $\Gamma$ .

Определим, к какому типу принадлежит (1) уравнение в области  $D$ . Так как

$$\Delta = b^2 - a \cdot c,$$

где  $a = K(t)$ ,  $b = 0$ ,  $c = -h(x)$ . Отсюда  $\Delta = K(t) \cdot h(x)$ .

По классификации уравнений частного производного второго порядка уравнения (1) принадлежит к уравнениям смешанного типа в области  $D$ , т. е.

Если  $t = 0$ ,  $K(0) = 0$ , то  $\Delta = 0$ .

Если  $x = 0$ ,  $x = l$ ,  $h(0) = h(l) = 0$ , то  $\Delta = 0$ .

Отсюда, в области  $\{t = 0, 0 < x < l\} \cup \{t \in [-T, T], x = 0\} \cup \{t \in [-T, T], x = l\}$  уравнение (1) параболического типа.

В области  $D^+ = D \cap \{t > 0\} = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$   $\Delta > 0$ , тогда уравнение (1) гиперболического типа.

В области  $D^- = D \cap \{t < 0\} = \{(x, t) : 0 < x < l, -T < t < 0\}$   $\Delta < 0$ , тогда уравнение (1) эллиптического типа.

Для уравнения (1) изучаем следующую краевую задачу:

**Краевая задача:** Найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую в области  $D$  уравнению (1), а при  $t = -T$  граничному условию:

$$u(x, -T) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$C_2$  — пространство функций, принадлежащих в класс  $C^2(\bar{D})$  и удовлетворяющих условие (2).

Через  $H_1(D)$  и  $H_2(D)$  мы обозначим объединение следующих норм в пространстве  $C_2$ :

$$\|u\|_{H_1}^2 = \int_D (u_t^2 + h(x)u_x^2 + u^2) dD;$$

$$\|u\|_{H_2}^2 = \int_D (u_t^2 + h^2(x)u_{xx}^2 + h(x)u_x^2) dD; + \|u\|_{H_1}^2.$$

**Лемма.** Пусть существуют такие постоянные  $\delta > 0$ ,  $\delta_0 > 0$  и  $M > 0$ , что для коэффициентов (1) уравнения выполнялись следующие неравенства:

$$2 \cdot a(x, 0) - K_t(0) \geq \delta, \quad x \in [0, 1];$$

$$c(x, t) \geq \delta_0, \quad (x, t) \in D^+;$$

$$2 \cdot c(x, t) - a_t(x, t) - b_x(x, t) - K_u(x, t) - h_{xx}(x, t) \geq 2 \cdot \delta_0, \quad (x, t) \in \overline{D^-};$$

$$|b(x, t) + h_x(x, t)|^2 < M \cdot h(x), \quad (x, t) \in D^-,$$

Тогда найдутся постоянные  $\lambda_0 > 0$ ,  $\mu_0 > 0$  такие, что для  $\forall u(x, t) \in C_2$  выполняется следующее неравенство:

$$2 \cdot \int_D e^{-\lambda_0 t} u_t L u dx dt + \mu_0 \int_D u L u dx dt \geq m \|u\|_{H_1}^2. \tag{3}$$

Для решения краевой задачи (1) — (2), мы используем приближенной (численный) метод (метод разностных схем). Для доказательства устойчивости разностной модели, мы используем априорную оценку (3).

В этой статье рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа и приводится лемма для решения задачи, которая далее используется для доказательства устойчивости разностной модели, построенной для этой краевой задачи.

Литература:

1. Алаев, Р.Д. Метод диссипативных интегралов энергии для разностных схем. Новосибирск 1983 г.
2. Бицадзе, А.В. Уравнения смешанного типа. — М. Изд-во АН СССР, 1959. — 164с.
3. Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Новосибирск: НГУ, 1983—84с.
4. Рахмонов, Х.О. О первой краевой задаче для одного уравнения смешанного типа в пространстве. — Новосибирск, 1985. — 22с. — (препринт. АН СССР. Сиб. Отд-ние. Ин-т математики; № 12
5. Алоев, Р.Д., Рахмонов Х.О., Шарипова Ш. Исследование разностной модели краевой задачи для уравнения смешанного типа. «Оптимизация численных методов» Тезисы докладов международной научной конференции «Оптимизация численных методов», посвященной 90-летию со дня рождения С.Л. Соболев. Уфа ИМВЦ УНЦ РАН 1998г, 4—5-с.
6. Меражова, Ш. Численное решения первой и второй краевой задачи для уравнения смешанно-составного типа. Материалы конференции, посвященные юбилею В.И. Романовского, Ташкент, 2004, 81—84-с.

## Решение методом продолжения задач математической физики в полуограниченных областях

Меражова Шахло Бердиевна, старший преподаватель  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Пусть задано следующее уравнение 2-го порядка с двумя переменными в области  $D \subset R^2$ :

$$P a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{1}$$

Здесь  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  — коэффициенты уравнения, определенные в области  $D \subset R^2$  достаточно гладкие функции, одновременно в  $D$  не равные нулю, а  $F$  заданная функция своих аргументов.

Введем следующее обозначение:  $\Delta(x, y) = a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$ .

Мы знаем, что в области  $D$  значение выражения  $\Delta(x, y)$  может быть отрицательным, положительным или равным нулю, тогда соответственно в  $D$  уравнение (1) называется или эллиптического, или гиперболического, или параболического типа.

Для изучения физического процесса кроме уравнения определяющий этот процесс, должны быть заданы дополнительные условия, т. е. начальные и граничные условия. С точки зрения математики это связано с неединственностью решения дифференциального уравнения.

Для нахождения решения задачи, определяющего физический процесс, нам приходится задать дополнительные условия. Пусть  $G \in R^n$  область, где происходит процесс, а  $S$  её граница, она частично гладкая поверхность. Для дифференциальных уравнений различают три типа задач: задача Коши; краевая задача; смешанная задача.

Мы знаем, что свободное колебание струны задается следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Общее решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$$

Используя это решение, мы можем решить задачу Коши.

**Задача Коши:** Найти решение уравнение (2) в области  $-\infty < x < \infty, t > 0$ , удовлетворяющее начальные условия:

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \phi_1(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{3}$$

Решения задачи Коши задается формулой Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - at) + \phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \phi_1(s) ds. \tag{4}$$

В полуограниченной  $x \geq 0$  области для уравнение (2) мы можем ставить следующие краевые задачи; т. е. в области  $\{x > 0, t > 0\}$  мы должны найти  $u(x, t)$  функцию, решение задачи (2)-(3), удовлетворяющее, или  $u(0, t) = \mu(t)$  (I краевое условие), или  $u_x(0, t) = \mu_1(t)$  (II краевое условие), или  $\alpha u(0, t) + \beta u_x(0, t) = \mu_2(t)$  (III краевое условие) граничное условие. Эти задачи соответственно называются или первой краевой задачей, или второй краевой задачей, или третьей краевой задачей.

Для решения таких задач используем метод продолжений. Здесь функция продолжается или на четную, или на нечетную функцию. Если начально- заданные функции относительно  $x = 0$  нечетные, тогда  $u(0, t) = 0$ , если начально- заданные функции относительно  $x = 0$  четные, тогда  $u_x(0, t) = 0$ . Мы используем эти факты при решения задач, заданных в полуограниченных областях для уравнений гиперболического типа.

Теперь рассмотрим в полуограниченной  $x \geq 0$  области задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{5}$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{6}$$

Для решения задач поставленных для уравнений теплопроводности в полуограниченной области мы можем использовать следующие леммы.

**Лемма 1.** Если в  $-\infty < x < \infty$  определенная функция  $\phi(x)$  относительно точки  $x = 0$  нечетная, тогда решение задачи (5), (6) в точке  $x = 0$  равно нулю, т. е.  $u(0, t) = 0$ .

**Доказательство.** Для доказательства этой леммы, мы используем следующую формулу Пуассона для решения задачи (5), (6):

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \tag{7}$$

Находим значения функции  $u(x, t)$  при  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \Bigg|_{x=0} = \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} = \eta \Bigg|_{d\xi = -2a\sqrt{t}d\eta} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-2a\sqrt{t}\eta) \cdot e^{-\eta^2} d\eta \Bigg|_{x=0} = \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(-2a\sqrt{t}\eta) \cdot e^{-\eta^2} d\eta = 0, \end{aligned}$$

т. е., по условию леммы  $\phi(x)$  — нечетная функция, а мы знаем,  $e^{-x^2}$  — четная функция. Произведение четных и нечетных функций есть нечетная функция, по свойству определенного интеграла в симметрической области определенный интеграл от нечетной функции равен нулю, значить и наш интеграл тоже равен нулю. Лемма доказана.

**Лемма 2.** Если в  $-\infty < x < \infty$  определенная функция  $\phi(x)$  относительно точки  $x = 0$  четная, тогда производная по  $x$  от решения задачи (5), (6) в точке  $x = 0$  равен нулю, т. е.  $u_x(0, t) = 0$ .

Доказательство этой леммы проводится, как предыдущая лемма.

Используя эти леммы, мы можем решить задачи, поставленные для уравнений параболического типа в полуограниченных областях.

Литература:

1. Салохиддинов, М. С., Математик физика тенгламалари. Т. «Ўзбекистон». 2002. — 448 б.
2. Жўраев, Т. Ж., Абдиназаров С. Математик физика тенгламалари Т., 2003
3. Бицадзе, А. В. Уравнения математической физики. М., Наука 1976.
4. Тихонов, А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. 1968.

## Один способ генерации графа

Мирошниченко Никита Максимович, студент  
Санкт-Петербургский государственный университет

Нахождение минимального остовного дерева — задача, которую решили уже давно и даже несколькими методами. Однако, на мой взгляд, реализация таких, проверенных временем алгоритмов позволяет глубже разобраться в проблеме и получить неоценимый опыт.

Для изучения данной задачи был выбран алгоритм Борувки, изобретенный еще в 1926 году. Первоначально предполагалось написать программу, которой на вход подавался граф, а на выходе получалось остовное дерево.

Однако в ходе реализации стало ясно, что тестировать ее не на чем. И надо сказать, что проблема входных данных достаточно часто встает при написании любых алгоритмов, поэтому было предложено написать алгоритм-программу, которая генерировала такие графы, которые бы максимально усложняли нахождение минимального остовного дерева для алгоритма Борувки.

Первоначальная идея была в том, чтобы создать алгоритм, который бы генерировал граф по количеству вершин и коэффициенту кластерности. Сначала выберем в сети некоторую вершину  $i$ , имеющую  $d_i$  ребер. Если первые ближние соседи этой вершины являются частью

клик, между ними существует  $\frac{d_i(d_i-1)}{2}$  ребер. Отно-

шение между числом  $E_i$  ребер, действительно существующих между  $k_i$  вершинами, и общим числом ребер

$\frac{d_i(d_i-1)}{2}$  является значением коэффициента кластерности

вершины  $i$ :  $c_i = \frac{2E_i}{d_i(d_i-1)}$ . Путем изменения этого коэф-

фициента можно было бы генерировать совершенно разные графы. И опытным путем можно было определить наиболее замедляющий алгоритм коэффициент. Из графа затравки выращивался граф большего размера, на котором количество транзитивно замкнутых вершин увеличивалось ровно настолько, чтобы обеспечить нужный коэффициент кластерности.

Но от этой идеи пришлось отказаться в связи с неоправданно высокой сложностью данного способа гене-

рации. Даже на ранних этапах, просто для того, чтобы выяснить кластерность выращенного графа приходилось тратить слишком много времени.

Значит был нужен алгоритм проще, который обладал бы нужными свойствами для замедления Борувки. Была предложена следующая идея: создавать графы, в которых сильно связанные компоненты объединялись небольшим количеством ребер. Почему данный вариант должен был сработать? Достаточно рассмотреть устройство алгоритма Борувки.

Пусть  $T$  подграф графа  $G$ . Изначально  $T$  содержит все вершины из  $G$  и не содержит ребер. Будем добавлять в  $T$  ребра следующим образом: пока  $T$  не является деревом:

1. Для каждой компоненты связности находим минимальное по весу ребро, которое связывает вершину из данной компоненты с вершиной, не принадлежащей данной компоненте.

2. Добавим в  $T$  все ребра, которые хотя бы для одной компоненты связности оказались минимальными. Получившийся граф  $T$  является минимальным остовным деревом графа  $G$ .

Данный алгоритм может работать неправильно, если в графе есть ребра равные по весу. Например, полный граф из трех вершин, вес каждого ребра равен один. В  $T$  могут быть добавлены все три ребра. Избежать эту проблему можно, выбирая в первом пункте среди ребер, равных по весу, ребро с наименьшим номером.

Количество компонент связности растет тем медленней, чем больше компонент на шаге выбирают одновременно связывание. Предложенная модель графа хороша именно этим: высокие показатели связности кластеров обеспечивают довольно большое количество одно-временных связываний, в то же время не давая выйти за их пределы.

Осталось понять, как строить такой граф. Решение нашлось довольно быстро. Так как граф состоит из кластеров, то в первую очередь нужно создать их множество, а после соединить небольшим количеством ребер. Замечу, что *внешние* ребра должны весить больше, чем *внутренние*, так как тогда связывание не будет выходить за пределы единого кластера.

### Реализация

Дело оставалось за малым: реализовать это. Первым делом стоило продумать архитектуру. Граф, конечно же, нужно было хранить в списке смежности, так как эта структура сочетает в себе быстроту, небольшое количество используемой памяти, удобство. Список состоит из вершин и дуг, им принадлежащим, следовательно, стоило создать отдельную структуру для дуги и вершины. Первая, очевидно, состоит из веса и одного из концов (так как дуга всегда принадлежит вершине). Вершина включает в себя ее название и список дуг. Ну и, самое большое, граф — состоит из списка вершин. Нужно было создать два основных метода: метод, который будет создавать кластеры, и метод, который будет их объединять.

### Создание кластера

Существуют простые схемы создания графов, которые достаточно сильно связаны. Однако, все они обладают одним недостатком: количество выделяемой памяти неизвестно. То есть приходится использовать динамические структуры данных, что не плохо, однако велик шанс занять лишнюю память. Поэтому было решено использовать схему, в которой количество дуг для каждой вершины определяется заранее случайным образом. Таким образом, был необходим метод, которому на вход подавалось количество вершин, а на выход шел бы массив, каждый элемент которого соответствовал степеням вершин. Далее нужно было заполнить граф дугами так, чтобы он был связным.

### Массив степеней вершин

Очевидно, что для массива степеней вершин подойдет не любая последовательность натуральных чисел, на нее налагается несколько условий, а точнее должна выполняться теорема Эрдёша-Галлаи. Теорема Эрдёша-Галлаи (критерий Эрдёша-Галлаи) — утверждение в теории графов, задающее условие, при котором конечной последовательности натуральных чисел можно сопоставить степени вершин некоторого графа. Для формулировки утверждения вводятся следующие определения:

Определение: *Правильная последовательность* — последовательность натуральных чисел длины  $n$  удовлетворяющая следующим условиям:

1.  $n - 1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$
2.  $\sum_{i=1}^n d_i$  — чётное число.

Определение: *Графическая последовательность чисел* — последовательность  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  целых неотрицательных чисел такая, что существует граф, последовательность степеней вершин которого совпадает с ней.

Теорема утверждает, что правильная последовательность  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  является *графической* тогда и только тогда, когда для каждого  $k$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$ , верно неравенство:

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}$$

Таким образом, алгоритм создания массива степеней вершин был такой: создается массив случайных величин, который изменяется так, чтобы теорема Эрдёша-Галлаи для него выполнялась. Изменение состояло в следующем:

1. Для каждого члена уже отсортированного массива проверялось неравенство Эрдёша-Галлаи.

2. При его невыполнении необходимая разница (для того, чтобы неравенство стало верным) прибавлялась к правой части, либо отнималась от левой. Причем так, чтобы последовательность оставалась невозрастающей. Замечу, что это оставляет неравенство верным для уже проверенных вершин, так как левая часть всегда только уменьшается, а правая только увеличивается. На выходе получается верный массив.

### Заполнение графа дугами

Заполнение идет по схеме: *наибольшее — наименьшему*, то есть мы идем с начала массива и каждую вершину связываем с вершинами с наименьшей степенью (если они уже не соединены). Получившийся граф с большой степенью вероятности будет связным. Это звучит весьма опасно, но практически всегда работает (о случаях, когда это не так, я расскажу далее). То есть на выходе мы получаем хорошо связный кластер.

### Связывание кластеров

В этой части нет никаких сложностей. Граф постепенно наращивается путем присоединения кластеров к уже существующей части. При этом количество дуг — случайно, их вес больше чем вес дуг кластеров. Существует возможность регулировать размер кластеров.

### Проблемы и их возможные решения

Описанный выше алгоритм генерации работает относительно стабильно, однако требует доработки. В частности, добавление дуг в кластер не гарантирует его связности. Уже были замечены случаи, когда на маленьких кластерах ( $<20$ ) наблюдались патологии в виде 2 вершин, который были связаны только друг с другом. Однако, маленькие кластеры не замедляют алгоритм, а поэтому пользоваться ими при тестах не нужно. Обеспечить связность графа можно подумав над критерием Гавели-Хакими, который позволяет строить простые графы из графической последовательности.

Другая важная проблема — память. При кластерах размера десяти тысяч вершин ее хватает только на сорок тысяч, при размере около пяти — на сто тысяч. То есть необходимо рассчитывать максимальный размер кластера при заданном размере. Самым лучшим способом увели-

чить размер генерируемого графа и размеры его кла- память. Но, к сожалению, за это придется платить скоро- стеров будет использование не оперативной, а обычной стью работы программы.

Литература:

1. neerc.ifmo. Алгоритм Борувки // ИТМО.— 2015.— URL: [http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Algorithm\\_Boruvki](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Algorithm_Boruvki)
2. Wikipedia. Теорема Эрдеша-Галлаи // Википедия, свободная энциклопедия.— 2015.— URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Theorem\\_Erdesh\\_Galai](https://ru.wikipedia.org/wiki/Theorem_Erdesh_Galai)
3. Критерий Гавела-Хаками.— 2015.— URL: [http://pco.iis.nsk.su/grapp2/html/ReqtpetNamekriteri2\\_gavela\\_hakimi.html](http://pco.iis.nsk.su/grapp2/html/ReqtpetNamekriteri2_gavela_hakimi.html)

## On a class of quasi-Volterra quadratic stochastic operators

Mukhitdinov Ramazon Tuxtaevich, PhD, Associate professor  
Bukhara State University, Uzbekistan

In [1] the notion of a quadratic stochastic operator was introduced. Such operators arise in problems of mathematical biology and mathematical genetics [1–7]. Let

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

be the  $(m-1)$ -dimensional simplex.

A map  $V$  from  $S^{m-1}$  into itself is called a *quadratic stochastic operator* (shortly QSO) if

$$V : x'_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, \dots, m \tag{1}$$

for any  $x \in S^{m-1}$ , where

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad p_{ij,k} = p_{ji,k}, \quad \text{for all } i, j, k; \quad \sum_{k=1}^m p_{ij,k} = 1 \tag{2}$$

Assume that  $\{x^{(n)} \in S^{m-1} : n = 0, 1, 2, \dots\}$  is the trajectory of the initial point  $x \in S^{m-1}$ , where  $x^{(n+1)} = V(x^{(n)})$  for all  $n = 0, 1, 2, \dots$ , with  $x^{(0)} = x$ .

A point  $x \in S^{m-1}$  is called a *fixed point* of a QSO  $V$  if  $V(x) = x$ .

A QSO  $V$  is called *regular* if for any initial point  $x \in S^{m-1}$ , the limit  $\lim_{n \rightarrow \infty} V^n(x)$  exists. Note that the limit point is a fixed point of a QSO. Thus, the fixed points of a QSO describe limit or long run behavior of the trajectories for any initial point.

In [7], Zakharevich proved that this conjecture is false in general. The biological treatment of non-ergodicity of a QSO is the following: in a long run the behavior of the distributions of species is chaotic, i.e. it is unpredictable. Note that a regular QSO is ergodic, but in general from ergodicity does not follow regularity.

Let the set  $\text{int } S^{m-1} = \{x \in S^{m-1} : x_1 x_2 \dots x_m > 0\}$  be the interior of  $S^{m-1}$  and  $\omega(x^{(0)})$  be the set of limit points of the trajectory  $\{V^k(x^{(0)}) \in S^{m-1} : k = 0, 1, 2, \dots\}$ .

A quadratic stochastic operator is called *Volterra* if  $p_{ij,k} = 0$  for any  $k \notin \{i, j\}$ ,  $i, j, k = 1, \dots, m$ .

The biological treatment of such operators is rather clear: the offspring repeats one of its parents. Recall the definition of quasi-Volterra operator following [2].

**Definition [2].** A quadratic stochastic operator (1), (2) is said to be a *quasi-Volterra operator* if only one coefficient  $p_{ij,k}$  is non-zero when  $k \notin \{i, j\}$  and all others are zero.

All quasi-Volterra QSOs defined on two-dimensional simplex can be divided into two types.

Without lost of generality we may assume  $p_{11,1} \neq 0, p_{11,2} \neq 0$  then an arbitrary quasi-Volterra operator of first type has the following representation:

$$\begin{cases} x'_1 = p_{11,1}x_1^2 + 2p_{12,1}x_1x_2 + 2p_{13,1}x_1x_3, \\ x'_2 = p_{11,2}x_1^2 + x_2^2 + 2p_{12,2}x_1x_2 + 2p_{23,2}x_2x_3, \\ x'_3 = x_3^2 + 2p_{13,3}x_1x_3 + 2p_{23,3}x_2x_3, \end{cases} \tag{3}$$

Similarly without loss of generality we may assume  $p_{12,3} \neq 0$  then an arbitrary quasi-Volterra operator of second type has the following representation:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1^2 + 2p_{12,1}x_1x_2 + 2p_{13,1}x_1x_3, \\ x'_2 = x_2^2 + 2p_{12,2}x_1x_2 + 2p_{23,2}x_2x_3, \\ x'_3 = x_3^2 + 2p_{13,3}x_1x_3 + 2p_{23,3}x_2x_3 + 2p_{12,3}x_1x_2, \end{cases} \quad (4)$$

In [2] the sets of fixed points of the quasi-Volterra operators (3) and (4) are described and for some special classes of first and second type quasi-Volterra operators it was proven that ergodic hypotheses true.

Let us consider the following quasi-Volterra quadratic stochastic operator

$$V : \begin{cases} x'_1 = \alpha x_1^2 + 2a x_1x_2 + 2b x_1x_3, \\ x'_2 = \beta x_1^2 + x_2^2 + 2(1-a)x_1x_2 + 2c x_2x_3, \\ x'_3 = x_3^2 + 2(1-b)x_1x_3 + 2(1-c)x_2x_3, \end{cases} \quad (5)$$

where  $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$  and  $0 \leq a, b, c \leq 1$ .

In general, the main problem of the study of the asymptotic behavior of a quasi-Volterra QSO is also a difficult problem, which remains open, even in the two-dimensional simplex case. Below we consider the case  $b = c \neq 1/2$ .

It is easy to check that *i*) the quasi-Volterra QSO (5) is first type and *ii*) the quasi-Volterra QSO (5) doesn't coincide with quasi-Volterra QSOs which were studied in [2].

**Theorem:** Let  $b = c \neq 1/2$ .

- i) If  $0 \leq a \leq 1, 0 \leq 2b \leq 1$  then for any initial point the trajectory of quasi-Volterra QSO (5) converges to vertex  $e_3 = (0, 0, 1)$ ;
- ii) If  $0 \leq a \leq 1, 0 \leq 2b \leq 1$  then for any initial point the trajectory of quasi-Volterra QSO (5) converges to vertex  $e_2 = (0, 1, 0)$ ;
- iii) If  $2a > 1, 2b > 1$  then  $\omega(x) \subset \{t \in S^2 : t_3 = 0\}$  for any initial point  $x \in S^2$ .

**Corollary:** Assume conditions of items i), ii) of Theorem are satisfied, then a quasi-Volterra QSO (5) is regular operator and it is an ergodic transformation.

References:

1. Bernstein, S.N.: Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity. Ann. Math. Statistics 13, 53–61 (1942).
2. Ganikhodjaev, N.N., Mukhitdinov, R.T.: On a class of non-Volterra quadratic operators. Uzbek Math. J. 3–4, 9–12 (2003), (in Russian).
3. Ganikhodzhaev, R.N.: Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments. Sb. Math. 76, 489–506 (1993).
4. Ganikhodzhaev, R.N.: Map of fixed points and Lyapunov functions for one class of discrete dynamical systems. Math. Notes 56, 1125–1131 (1994)
5. Ganikhodzhaev, R.N., Mukhamedov, F.M., Rozikov, U.A.: Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems. Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 14, 279–335 (2011).
6. Lyubich, Y.I.: Mathematical structures in population genetics. Volume 22 of Biomathematics. Springer-Verlag, Berlin (1992).
7. Zakharevich, M.I.: On the behaviour of trajectories and the ergodic hypothesis for quadratic mappings of a simplex. Russ. Math. Surv. 33, 265–266 (1978).

## Формализация и анализ математической модели взаимодействия участников коррупционной сделки

Никифорова Анна Анатольевна, студент  
Санкт-Петербургский государственный университет

*В данной работе проводится анализ математической модели взаимодействия агентов коррупционного процесса в условиях неполной информации. Описан алгоритм нахождения нормальной формы игры с неполной информацией и оптимальных стратегий участников. Найдены средние ожидаемые выигрыши участников*

коррупционной сделки в конечно повторяющейся игре с неполной информацией. Анализ модели проведен с помощью инструментов теории игр с неполной информацией.

**Ключевые слова:** коррупционная сделка, игра с неполной информацией, средний ожидаемый выигрыш

Исследования в области описания коррупционных процессов с помощью построения математических моделей возникли в 70х годах 20ого века [3]. В работе рассматривается математическая модель взаимодействия участников коррупционной сделки в условиях асимметрии информации. Асимметрия информации означает, что один из участников обладает «большой» информацией или имеет доступ к ней в то время, как остальные участники обладают «меньшей» информацией или не обладают ей вовсе.

**Постановка задачи**

Рассматривается процесс заключения коррупционной сделки между агентами в условиях неполной информации.

Пусть:

$I = \{1, \dots, n\}$  множество агентов, участвующих в коррупционной сделке.

$K = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$  — множество коррупционных эпизодов, возникающих в следствии асимметрии информации.

$S = \{\{S_{ij}\}_{j=1}^m\}_{i=1}^n$  — множество стратегий  $i$ - ого агента в коррупционном эпизоде  $j$ .

$\{F_{ij}\}_{j=1}^m\}_{i=1}^n$  — функция выигрыша  $i$ - ого агента в коррупционном эпизоде  $j$ .

**Формализация модели**

Рассматривается модель, в которой взаимодействуют два агента: коррумпированный Чиновник и Клиент. В процессе этого взаимодействия, Чиновник и Клиент заключают коррумпированную сделку, следуя которой Клиент платит Чиновнику сумму в определенном размере. Чиновник также заинтересован в получении взятки.

Следуя данной модели, Чиновник стремится максимизировать размер взятки, а Клиент стремится минимизировать размер предлагаемой взятки. Процесс заключения сделки между Чиновником и Клиентом проходит одним из двух способов:  $C_1$  или  $C_2$ . Каждый участник решает, каким именно способом он хочет провести сделку. Пусть буква « $C_1$ » означает, что сделка проводится первым способом, а буква « $C_2$ », что сделка проводится вторым способом. Если агенты решают провести сделку разными способами, то коррупционная сделка не совершается.

Неопределенность ситуации заключается в том, что размер взятки зависит от предпочтений Чиновника. Пусть Чиновник имеет два типа предпочтений  $m = \{1,2\}$ . Пусть в роли коррупционных эпизодов выступают тип предпочтений Чиновника.

Рассмотрим два коррупционных эпизода  $G_1$  и  $G_2$ . В коррупционном эпизоде  $G_1$  предпочтения Чиновника принадлежат к первому типу, а в  $G_2$  принадлежат ко второму типу. Пусть тип предпочтений Чиновника принадлежит к первому типу с вероятностью равной  $p = 1/3$ .

Предполагается, что Клиент не осведомлен о предпочтениях Чиновника. Коррупционные эпизоды  $G_1$  и  $G_2$  представлены в виде игры в нормальной форме [4]. Числа в ячейках матрицы обозначают размер взятки, которую Клиент передаст Чиновнику (Таблица 1.).

Представим коррупционные эпизоды  $G_1$  и  $G_2$  в развернутой форме в виде игры  $\Gamma_1$ , где левая ветвь графа описывает коррупционный эпизод  $G_1$ , а правая ветвь графа коррупционный эпизод  $G_2$  (Рисунок 1.)

Таблица 1

		Клиент		
		$C_1$	$C_2$	
Чиновник	$C_1$	3	0	$G_1$
	$C_2$	0	0	
		Клиент		
		$C_1$	$C_2$	
Чиновник	$C_1$	0	0	$G_2$
	$C_2$	0	2	

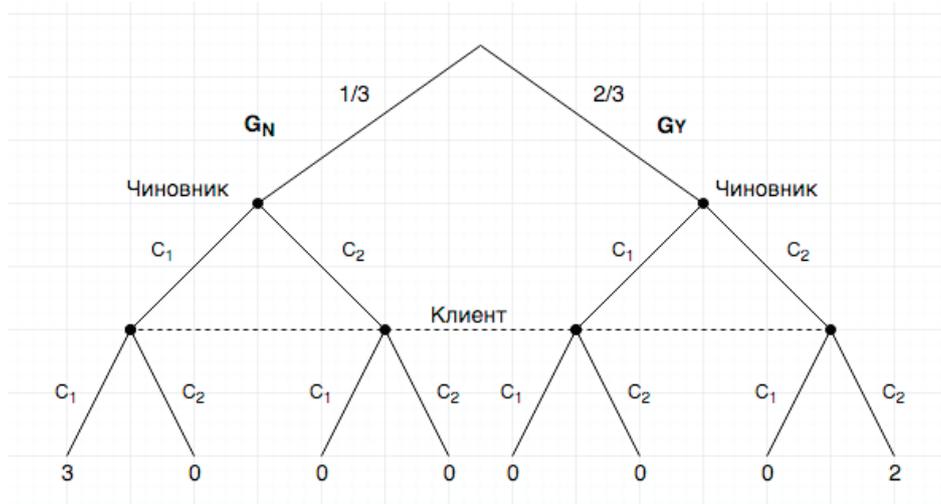


Рис. 1

**Оптимальные стратегии чиновника при совершении одной сделки**

Значение игры  $G_1$  и  $G_2$  обозначены за  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Значение  $\omega_1 = 0$  и  $\omega_2 = 0$ . Таким образом, Чиновник гарантированно получает взятку размером 0, а Клиент гарантированно платит не более чем 0.

Рассмотрим нормальную форму игры  $\Gamma_1$  (Таблица 2.), в которой Чиновник имеет 4 стратегии:  $\{C_1C_1, C_1C_2, C_2C_1, C_2C_2\}$ , в которых, например  $(C_1C_1)$ , означает что Чиновник в коррупционном эпизоде  $G_1$  выбирает стратегию  $C_1$ , а в коррупционном эпизоде  $G_2$  стратегию  $C_2$ . [1] Клиент имеет только 2 стратегии  $\{C_1, C_2\}$ . В ячейках матрицы обозначены ожидаемые выигрыши Чиновника:

Пусть  $p_1 = \frac{1}{3}; p_2 = \frac{2}{3}$ .

$$E[(C_1C_1), C_1] = 3 \times p_1 + 0 \times p_2 = 1$$

$$E[(C_1C_1), C_2] = 0 \times p_1 + 0 \times p_2 = 0$$

$$E[(C_1C_2), C_1] = 3 \times p_1 + 0 \times p_2 = 1$$

$$E[(C_1C_2), C_2] = 0 \times p_1 + 2 \times p_2 = \frac{4}{3}$$

$$E[(C_2, C_1), C_1] = 0 \times p_1 + 0 \times p_2 = 0$$

$$E[(C_2C_1), C_2] = 0 \times p_1 + 0 \times p_2 = 0$$

$$E[(C_2C_2), C_1] = 0 \times p_1 + 0 \times p_2 = 0$$

$$E[(C_2C_2), C_2] = 0 \times p_1 + 2 \times p_2 = \frac{4}{3}$$

Вторая строка в матрице игры (Таблица 2.) доминирует первую, третью и четвертую. Так как  $1 < 4/3$ , то ожидаемый выигрыш Чиновника (значение игры) в игре  $\Gamma_1$  обозначим за  $v_1 = 1$ . Стратегия  $((C_1C_2), C_1)$  является оптимальной. [2]

На Рисунке 2. представлены оптимальные стратегии Чиновника и Клиента. Пунктир на Рисунке 2. означает, что Клиент не знает предпочтений Чиновника.

Стрелки на графе показывают оптимальные стратегии Чиновника и Клиента. Обозначим за  $v_N$  — выигрыш Чиновника, если оба участника следуют оптимальным стратегиям в коррупционном эпизоде  $G_1$ , а за  $v_Y$  — выигрыш Чиновника, если оба участника следуют оптимальным стратегиям в коррупционном эпизоде  $G_2$ .

$$v_1 = 3; v_2 = 0;$$

Напомним, что  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ .

Таблица 2

		Клиент	
		$C_1$	$C_2$
Чиновник	$C_1C_1$	1	0
	$C_1C_2$	1	4/3
	$C_2C_1$	0	0
	$C_2C_2$	0	4/3

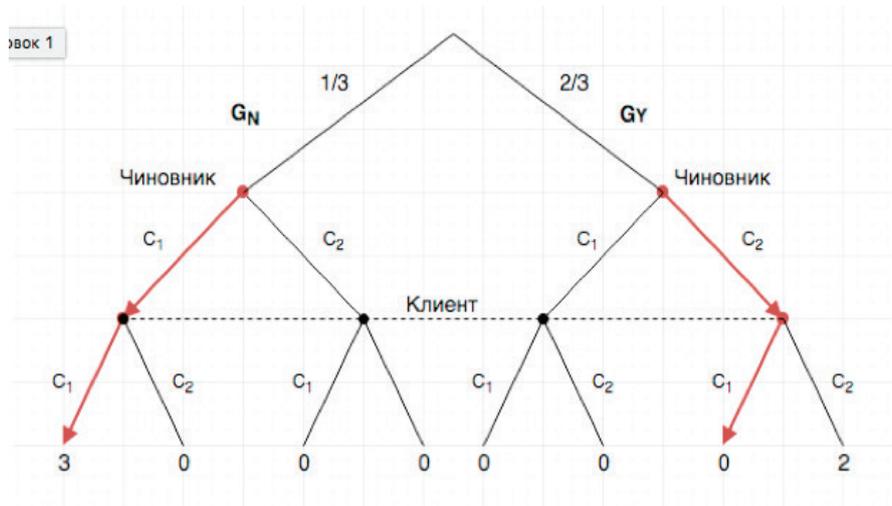


Рис. 2

$$v_1 > \omega_1$$

$$v_2 = \omega_2$$

**Оптимальные стратегии чиновника и клиента при совершении n- сделок**

Рассмотрим коррупционный эпизод, в котором Чиновник и Клиент должны заключить несколько сделок в один день. Таким образом, коррупционный эпизод  $G_1$  или  $G_2$  будет повторяться  $n$  — раз, где  $n$  — количество сделок, совершенных в определенный день. Чиновник после совершения каждой сделки, Клиент будет точно знать какую стратегию выбрал Чиновник и объем взятки.

Рассмотрим случай, в котором Чиновник будет пользоваться оптимальными стратегиями, предписанными ему в  $G_1$ , а именно, выбирать стратегию  $C_1$ , если перед ним коррупционный эпизод  $G_1$  и стратегию  $C_2$ , если перед ним коррупционный эпизод  $G_2$ . Если  $n$  — номер сделки и если  $n = 1$ , тогда  $G_1$  представляется в развернутой форме как (Рисунок 3.):

Клиенту известны стратегии и выигрыши Чиновника. Таким образом, если Чиновник при совершении первой сделки пользуется оптимальными стратегиями, то Клиент немедленно узнает предпочтения Чиновника.

Рассмотрим совершение второй сделки  $n = 2$ , в которой Клиент точно знает, какой перед ним коррупционный эпизод  $G_1$  или  $G_2$  (Рисунок 4.):

Ожидаемый выигрыш Чиновника в любой из двух ситуаций будет равен нулю.

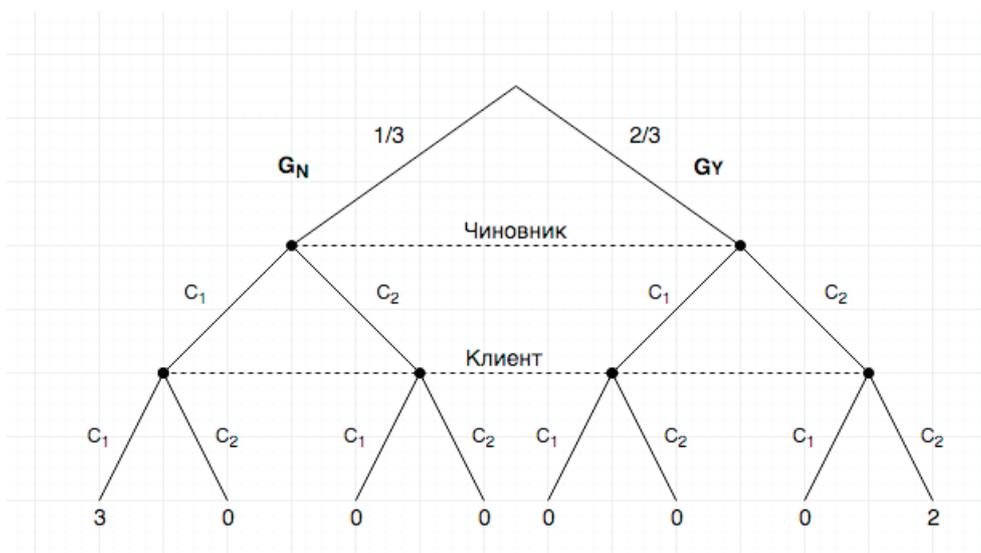


Рис. 3

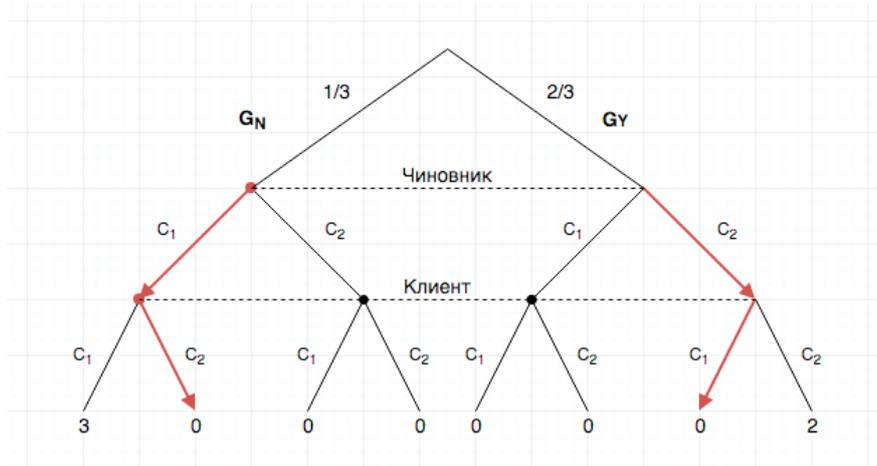


Рис. 4

Пусть  $E_q$  — средний ожидаемый выигрыш Чиновника при совершении сделок в количестве  $n$ , тогда:

$$E_q = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_k(\delta, \tau) = \frac{(1+0+0+\dots+0)}{n} = \frac{1}{n} \tag{1}$$

где:

$n$  - количество совершаемых сделок;

$E_k(\delta, \tau)$  - ожидаемый выигрыш Чиновника при совершении  $k$ -ой сделки, если Чиновник использовал стратегию  $\delta$ , а Клиент стратегию  $\tau$ ;

Таким образом, средний ожидаемый выигрыш Чиновника стремится к значению  $\omega_N$  или  $\omega_V$ .

Пусть рассматривается ситуация, в которой Чиновник игнорирует свои предпочтения в размере взятки. Выигрыши и стратегии Чиновника и Клиента остаются прежними и этот коррупционный эпизод обозначен как  $\Delta_1$  (Рисунок 5.):

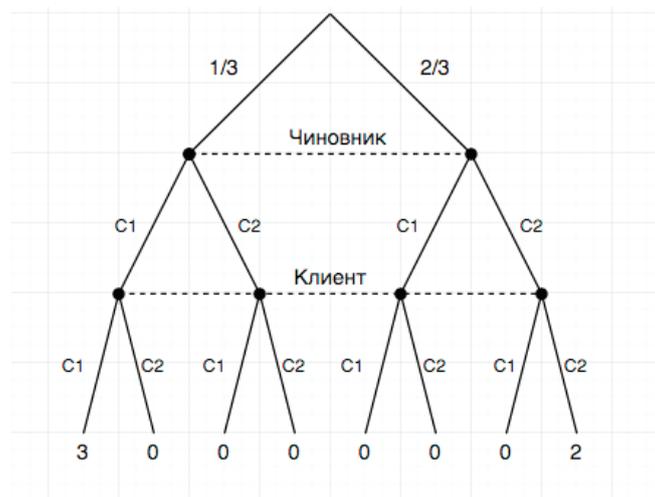


Рис. 5. Игра  $\Delta_1$

Нормальная форма  $\Delta_1$  (Таблица 3.), в которой Чиновник игнорирует свои предпочтения:

Таблица 3

		Клиент	
		$C_1$	$C_2$
Чиновник	$C_1$	1	0
	$C_2$	0	4/3

$$\alpha \times 1 + (1 - \alpha) \times 0 = \alpha \times 0 + (1 - \alpha) \times \frac{4}{3}$$

$$\alpha = \frac{4}{7}$$

Таблица 4

		Клиент	
		$\beta = \frac{4}{7}$	$1 - \beta = \frac{3}{7}$
Чиновник	$\alpha = \frac{4}{7}$	1	0
	$1 - \alpha = \frac{3}{7}$	0	4/3

Таким образом, Чиновник будет выбирать стратегию  $C_1$  с вероятностью  $\frac{4}{7}$ , а стратегию  $C_2$  с вероятностью  $\frac{3}{7}$ . Клиент будет следовать тем же смешанным стратегиям (Таблица 4.). Обозначим за  $u_q$  ожидаемый выигрыш Чиновника (значение игры  $\Delta_1$ ) в  $\Delta_1$ , тогда  $u_q = 4/7$ .

Обозначим за  $u_1$  ожидаемый выигрыш Чиновника в игре  $G_1$ , а за  $u_2$  — ожидаемый выигрыш Чиновника в ситуации  $G_2$ .

Пусть  $M_1$  — матрица выигрышей Чиновника в  $G_1$ :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть  $M_2$  — матрица выигрышей Чиновника в  $G_2$ :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Пусть  $x = \left\{ \frac{4}{7}, \frac{3}{7} \right\}$  - вектор смешанных стратегий Чиновника, а

$y = \left\{ \frac{4}{7}, \frac{3}{7} \right\}$  - вектор смешанных стратегий Клиента.

Тогда,  $u_N = xM_1y^T$ ;  $u_Y = xM_2y^T$ ;

$$u_N = \frac{48}{49}; u_Y = \frac{18}{49}.$$

Рассмотрим случай, в котором Чиновник будет пользоваться стратегиями, описанными выше, в коррупционном эпизоде  $\Gamma_n$ , тогда его средний ожидаемый выигрыш будет  $E_q = 4/7$  ( $E_q = \frac{4}{7} \frac{n}{n} = \frac{4}{7}$ ). Так как -целое число, то при

$$\forall n \frac{4}{7} > \frac{1}{n}.$$

Напомним, что  $\omega_N = \omega_Y = 0$ . Получаем  $u_N > \omega_N$ , а  $u_Y > \omega_Y$ .

Вывод: Если Чиновник игнорирует свои предпочтения в размере взятки, то при заключении коррумпированных сделок в количестве равном  $n$ , его средняя ожидаемая прибыль от этих сделок, будет выше чем средняя ожидаемая прибыль, если бы Чиновник следовал своим предпочтениям.

### Проверка секретности информации, доступной чиновнику, при совершении $n$ сделок

Проверим, что Чиновник, пользуясь стратегиями, описанными в  $\Delta_1$ , гарантирует себе, что его предпочтения в размере взятки не станут известны Клиенту при совершении сделок в количестве  $n$ .

Рассмотрим коррупционный эпизод  $G_1$  и  $G_2$  со стороны Клиента. Пусть Клиент после совершения первой сделки, оценивает вероятность возникновения коррупционного эпизода  $G_1$  и  $G_2$ .

Клиент знает, что Чиновник будет выбирать стратегию  $C_1$  с вероятностью  $\frac{4}{7}$ , а стратегию  $C_2$  с вероятностью  $\frac{3}{7}$ . Клиент оценивает вероятность возникновения коррупционного эпизода  $G_1$  и  $G_2$ , пользуясь формулами условной вероятности.

Рассмотрим стратегии Чиновника при совершении  $i$ -ой сделки (Рисунок 6.). Пусть  $t_i$  - вероятность, с которой Чиновник выбирает стратегию  $C_1$  в коррупционном эпизоде  $G_1$ , а  $s_i$  - вероятность, с которой Чиновник выбирает стратегию  $C_1$  в коррупционном эпизоде  $G_2$ .  $p_i$  - вероятность появления коррупционного эпизода  $G_1$ . ( $i = \overline{1, n}$ )

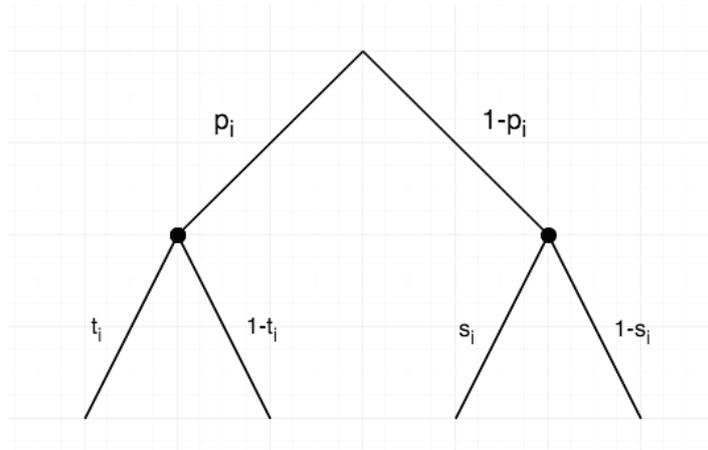


Рис. 6

Рассмотрим первую коррупционную сделку, то есть  $i = 1$  (Рисунок 7.).

$$\text{Вероятность}\{G_N | \text{Чиновник выбрал } C_1\} = \frac{s_1 p_1}{s_1 p_1 + t_1 (1 - p_1)} = \frac{4/21}{4/21 + 8/21} = \frac{1}{3};$$

$$\text{Вероятность}\{G_N | \text{Чиновник выбрал } C_2\} = \frac{(1 - s_1) p_1}{(1 - s_1) p_1 + (1 - t_1) (1 - p_1)} = \frac{4/21}{12/21} = \frac{1}{3};$$

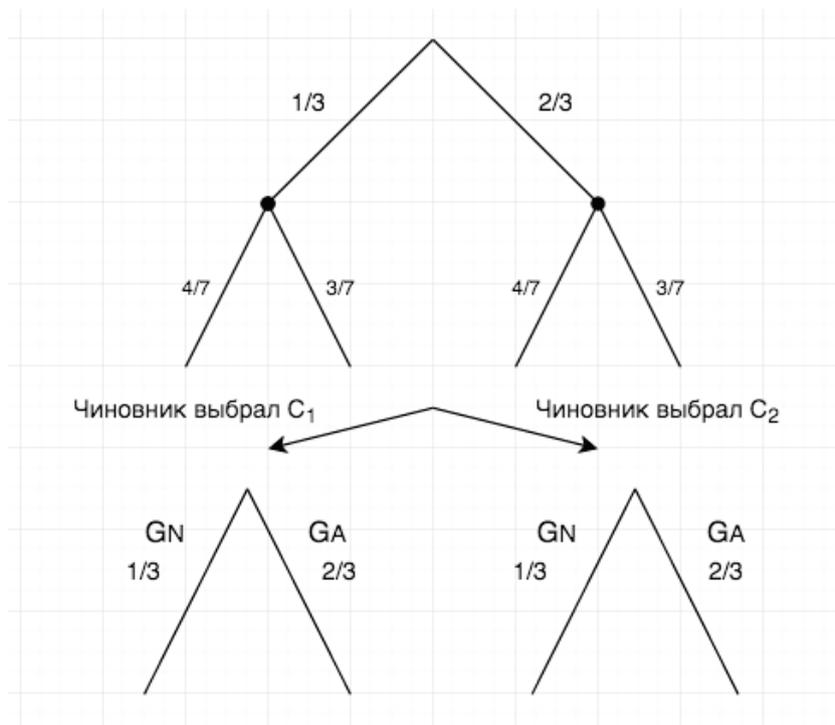


Рис. 7

Таким образом, если после каждой коррупционной сделки, Клиент оценивает вероятность появления коррупционного эпизода  $G_1$  и  $G_2$ , то значения этой вероятности не будут отличаться от  $1/3$  и  $2/3$ .

**Вывод**

В работе проведен анализ математической модели взаимодействия коррумпированного чиновника и клиента в условиях асимметрии информации. В роли информации в данной модели выступают вкусы и предпочтения одного из игроков. Рассмотрен конкретный пример и сделан вывод, что в конечно повторяющейся игре с неполной информацией игрок, обладающий информацией, должен действовать, не опираясь на свои предпочтения.

Литература:

1. Guillermo Ordonez Notes on Bayesian Games URL: <http://www.sas.upenn.edu/~ordonez/pdfs/ECON%20201/NoteBAYES.pdf>
2. Robert, J. Aumann Repeated games with incomplete information Robert/J. Aumann and Michael B. Mashler with collaboration of Richard B. Stearns — MIT Press. 1995. — 323 p.
3. Зенюк, Д. А., Малинецкий Г. Г., Фаллер Д. С. Социальная модель коррупции в иерархических структурах // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2013. № 87. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-87>
4. Петросян, Л. А. Теория игр / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич,
5. Е. А. Семина. — М.: Высшая школа, 1998. — 304 с.

## Система обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Нуриддинов Жавлон Зафарович, ассистент  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Решаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Решения ищем в виде следующих функциональных рядов:

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots, \\ v(x) &= v_0(x) + \lambda v_1(x) + \lambda^2 v_2(x) + \dots + \lambda^n v_n(x) + \dots, \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

здесь  $u_n(x)$  и  $v_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) пока неизвестные функции, если найдем все эти функции, то найдем решение.

Способ решения такой задачи рассмотрим в следующих примерах:

**Пример.** Пусть задана следующая система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\left. \begin{aligned} u'(x) &= x + \lambda v(x - \sigma), \\ v'(x) &= x + \lambda u(x - \sigma), \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

где  $\sigma > 0$  - постоянная,  $\lambda$  — параметр  $x - \sigma$  запаздывающий аргумент,  $u$  и  $v$  неизвестные функции.

Если в систему (2) подставим (1), то получаем следующие тождества:

$$u'_0(x) + \lambda u'_1(x) + \lambda^2 u'_2(x) + \dots + \lambda^n u'_n(x) + \dots \equiv x + \lambda [v_0(x - \sigma) + \lambda v_1(x - \sigma) + \lambda^2 v_2(x - \sigma) + \dots + \lambda^n v_n(x - \sigma) + \dots]$$

и

$$v'_0(x) + \lambda v'_1(x) + \lambda^2 v'_2(x) + \dots + \lambda^n v'_n(x) + \dots \equiv x + \lambda [u_0(x - \sigma) + \lambda u_1(x - \sigma) + \lambda^2 u_2(x - \sigma) + \dots + \lambda^n u_n(x - \sigma) + \dots]$$

Сравнивая коэффициенты при  $\lambda^m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) находим неизвестные  $u_m$  и  $v_m$ :

$$u'_0(x) = x, \quad v'_0(x) = x,$$

Интегрируя, находим:

$$u_0(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_0, \quad v_0(x) = \frac{1}{2}x^2 + D_0,$$

здесь  $C_0$  и  $D_0$  - любые действительные числа.

$$u'_1(x) = v_0(x - \sigma) = \frac{1}{2}(x - \sigma)^2 + D_0$$

$$v'_1(x) = u_0(x - \sigma) = \frac{1}{2}(x - \sigma)^2 + C_0$$

интегрируя эти равенства, находим,

$$u_1(x) = \frac{1}{3!}(x - \sigma)^3 + D_0x + C_1$$

$$v_1(x) = \frac{1}{3!}(x - \sigma)^3 + C_0x + D_1$$

Далее в следующих равенствах

$$u_2'(x) = v_1(x - \sigma)$$

$$v_2'(x) = u_1(x - \sigma)$$

подставляя предыдущие выражения, интегрируя, получаем:

$$u_2(x) = \frac{1}{4!}(x - 2\sigma)^4 + \frac{1}{2}C_0(x - \sigma)^2 + D_1x + C_2,$$

$$v_2(x) = \frac{1}{4!}(x - 2\sigma)^4 + \frac{1}{2}D_0(x - \sigma)^2 + C_1x + D_2;$$

Точно также можно находить и другие члены функциональных рядов:

$$u_3(x) = \frac{1}{5!}(x - 3\sigma)^5 + \frac{1}{3!}D_0(x - 2\sigma)^3 + \frac{1}{2}C_1(x - \sigma)^2 + D_2x + C_3,$$

$$v_3(x) = \frac{1}{5!}(x - 3\sigma)^5 + \frac{1}{3!}C_0(x - 2\sigma)^3 + \frac{1}{2}D_1(x - \sigma)^2 + C_2x + D_3;$$

.....

Общая закономерность вышла, поэтому можно считать, что  $u_n$  и  $v_n$  функции найдены. Теперь, все эти функции подставляя в (1) получаем следующее

$$\begin{aligned} u(x) = & [C_0 + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \dots + \lambda^n C_n + \dots] + \lambda x [D_0 + \lambda D_1 + \lambda^2 D_2 + \dots + \lambda^n D_n + \dots] + \\ & + \frac{\lambda^2}{2!}(x - \sigma)^2 [C_0 + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \dots + \lambda^n C_n + \dots] + \frac{\lambda^3}{3!}(x - 2\sigma)^3 [D_0 + \lambda D_1 + \lambda^2 D_2 + \dots + \lambda^n D_n + \dots] + \\ & + \frac{\lambda^4}{4!}(x - 3\sigma)^4 [C_0 + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \dots + \lambda^n C_n + \dots] + \frac{\lambda^5}{5!}(x - 4\sigma)^5 [D_0 + \lambda D_1 + \lambda^2 D_2 + \dots + \lambda^n D_n + \dots] + \\ & + \dots + \left[ \frac{1}{2}x^2 + \frac{\lambda}{3!}(x - \sigma)^3 + \frac{\lambda^2}{4!}(x - 2\sigma)^4 + \frac{\lambda^3}{5!}(x - 3\sigma)^5 + \dots \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} v(x) = & [D_0 + \lambda D_1 + \lambda^2 D_2 + \dots + \lambda^n D_n + \dots] + \lambda x [C_0 + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \dots + \lambda^n C_n + \dots] + \\ & + \frac{\lambda^2}{2!}(x - \sigma)^2 [D_0 + \lambda D_1 + \lambda^2 D_2 + \dots + \lambda^n D_n + \dots] + \frac{\lambda^3}{3!}(x - 2\sigma)^3 [C_0 + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \dots + \lambda^n C_n + \dots] + \\ & + \frac{\lambda^4}{4!}(x - 3\sigma)^4 [D_0 + \lambda D_1 + \lambda^2 D_2 + \dots + \lambda^n D_n + \dots] + \frac{\lambda^5}{5!}(x - 4\sigma)^5 [C_0 + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \dots + \lambda^n C_n + \dots] + \\ & + \dots + \left[ \frac{1}{2}x^2 + \frac{\lambda}{3!}(x - \sigma)^3 + \frac{\lambda^2}{4!}(x - 2\sigma)^4 + \frac{\lambda^3}{5!}(x - 3\sigma)^5 + \dots \right] \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$P = C_0 + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \dots + \lambda^n C_n + \dots$$

и

$$Q = D_0 + \lambda D_1 + \lambda^2 D_2 + \dots + \lambda^n D_n + \dots,$$

здесь,  $P$  и  $Q$  — произвольные постоянные числа. Тогда искомого решения, можем написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x) = & \left[ \frac{1}{2}x^2 + \frac{\lambda}{3!}(x - \sigma)^3 + \frac{\lambda^2}{4!}(x - 2\sigma)^4 + \frac{\lambda^3}{5!}(x - 3\sigma)^5 + \dots \right] + \\ & + P \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{2!}(x - \sigma)^2 + \frac{\lambda^4}{4!}(x - 3\sigma)^4 + \frac{\lambda^6}{6!}(x - 5\sigma)^6 + \dots \right] + \\ & + Q \left[ \lambda x + \frac{\lambda^3}{3!}(x - \sigma)^3 + \frac{\lambda^5}{5!}(x - 4\sigma)^5 + \frac{\lambda^7}{7!}(x - 6\sigma)^7 + \dots \right], \tag{3} \\ v(x) = & \left[ \frac{1}{2}x^2 + \frac{\lambda}{3!}(x - \sigma)^3 + \frac{\lambda^2}{4!}(x - 2\sigma)^4 + \frac{\lambda^3}{5!}(x - 3\sigma)^5 + \dots \right] + \\ & + P \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{2!}(x - \sigma)^2 + \frac{\lambda^4}{4!}(x - 3\sigma)^4 + \frac{\lambda^6}{6!}(x - 5\sigma)^6 + \dots \right] + \end{aligned}$$

$$+Q \left[ \lambda x + \frac{\lambda^3}{3!} (x - \sigma)^3 + \frac{\lambda^5}{5!} (x - 4\sigma)^5 + \frac{\lambda^7}{7!} (x - 6\sigma)^7 + \dots \right]$$

Если представим  $P = Q$ , то  $u(x) = v(x)$ . Если, например, представим  $P = Q = 0$  из решение (3) вытекает частное решения.

Литература:

1. М. С. Салахитдинов, Г. Н. Насритдинов. “Обыкновенные дифференциальные уравнение”, Ташкент, 1982 г.
2. Ш. Т. Максудов. Элементы линейных интегральных уравнений. Ташкент, 1975 (на узбекском языке).
3. И. И. Привалов. Интегральные уравнение. Гостехиздат, М. 1935.
4. У. В. Ловитт. Линейные интегральные уравнение. Гостехиздат, М. 1957.

## Система дифференциальных уравнений с частными производными с запаздывающим аргументом

Нуриддинов Жавлон Зафарович, ассистент  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Познакомимся с системой линейных дифференциальных уравнений с частными производными с запаздывающим аргументом. Покажем решения таких систем методом последовательных приближений. Решения заданных систем дифференциальных уравнений с частными производными с запаздывающим аргументом ищем в виде следующих функциональных рядов:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_0(x, y) + \lambda u_1(x, y) + \lambda^2 u_2(x, y) + \dots \lambda^n u_n(x, y) + \dots \\ v(x, y) &= v_0(x, y) + \lambda v_1(x, y) + \lambda^2 v_2(x, y) + \dots \lambda^n v_n(x, y) + \dots \end{aligned} \tag{1}$$

В этих выражениях все  $u_i$  и  $v_i$  функции на правой части, пока неизвестные функции, если найдем все эти функции, тогда решается заданный пример. Способ решения таких задач рассмотрим в следующих примерах:

**Пример.** Пусть задана следующая система линейных дифференциальных уравнений с частными производными с запаздывающим аргументом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= a + \lambda p \cdot v(x - \sigma, y - \tau), \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= b + \lambda q \cdot u(x - \sigma, y - \tau), \end{aligned} \tag{2}$$

где,  $\sigma > 0, \tau > 0$ , и  $p, q$  - неравные нулю постоянные числа

В эту систему подставляя функциональные ряды (1), получим две тождества. Сравнивая коэффициенты при  $\lambda^m (m = 0, 1, 2, \dots)$  находим неизвестные  $u_m$  и  $v_m$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} &= a, \\ \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} &= b; \end{aligned}$$

Интегрируя по  $x$ , получаем:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= ax + C_0(y), \\ v_0(x, y) &= bx + D_0(y). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} = p v_0(x - \sigma, y - \tau) = p [b(x - \sigma) + D_0(y - \tau)],$$

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} = q u_1(x - \sigma, y - \tau) = q [a(x - \sigma) + C_0(y - \tau)];$$

Еще раз интегрируя по  $x$  в итоге вытекает:

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2} p b (x - \sigma)^2 + p D_0(y - \tau) x + C_1(y),$$

$$v_1(x, y) = \frac{1}{2} qa(x - \sigma)^2 + qC_0(y - \tau)x + D_1(y)$$

Продолжая этот процесс получаем следующее:

$$u_2(x, y) = \frac{1}{3!} pqa(x - 2\sigma)^3 + \frac{1}{2} pqC_0(y - 2\tau)(x - \sigma)^2 + pD_1(y - \tau)x + C_2(y)$$

$$v_2(x, y) = \frac{1}{3!} pqb(x - 2\sigma)^3 + \frac{1}{2} pqD_0(y - 2\tau)(x - \sigma)^2 + pC_1(y - \tau)x + D_2(y)$$

Точно также

$$u_3(x, y) = \frac{1}{4!} p^2 qb(x - 3\sigma)^4 + \frac{1}{3!} p^2 qD_0(y - 3\tau)(x - 2\sigma)^3 +$$

$$+ \frac{1}{2} pqC_1(y - 2\tau)(x - \sigma)^2 + pD_2(y - \tau)x + C_3(y)$$

$$v_3(x, y) = \frac{1}{4!} pq^2 a(x - 3\sigma)^4 + \frac{1}{3!} pq^2 C_0(y - 3\tau)(x - 2\sigma)^3 +$$

$$+ \frac{1}{2} pqD_1(y - 2\tau)(x - \sigma)^2 + pC_2(y - \tau)x + D_3(y)$$

.....

Последующие члены тоже находятся этим способом.

Теперь подставляя все выражения для  $u_n$  и  $v_n$  в функциональные ряды (1) получим общее решения системы:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & \left[ ax + \frac{\lambda bp}{2!} (x - \sigma)^2 + \frac{\lambda^2 apq}{3!} (x - 2\sigma)^3 + \frac{\lambda^3 bp^2 q}{4!} (x - 3\sigma)^4 + \frac{\lambda^4 ap^2 q^2}{5!} (x - 4\sigma)^5 + \dots \right] + \\
 & + \left[ P(y) + \frac{\lambda^2 pq}{2!} P(y - 2\tau)(x - \sigma)^2 + \frac{(\lambda^2 pq)^2}{4!} P(y - 4\tau)(x - 3\sigma)^4 + \frac{(\lambda^2 pq)^3}{6!} P(y - 6\tau)(x - 5\sigma)^6 + \dots \right] + \\
 & \lambda p \left[ Q(y - \tau)x + \frac{\lambda^2 pq}{3!} Q(y - 3\tau)(x - 2\sigma)^3 + \frac{(\lambda^2 pq)^2}{5!} Q(y - 5\tau)(x - 4\sigma)^5 + \dots \right], \\
 v(x, y) = & \left[ bx + \frac{\lambda ap}{2!} (x - \sigma)^2 + \frac{\lambda^2 bpq}{3!} (x - 2\sigma)^3 + \frac{\lambda^3 apq^2}{4!} (x - 3\sigma)^4 + \frac{\lambda^4 bp^2 q^2}{5!} (x - 4\sigma)^5 + \dots \right] + \\
 & + \left[ Q(y) + \frac{\lambda^2 pq}{2!} Q(y - 2\tau)(x - \sigma)^2 + \frac{(\lambda^2 pq)^2}{4!} Q(y - 4\tau)(x - 3\sigma)^4 + \frac{(\lambda^2 pq)^3}{6!} Q(y - 6\tau)(x - 5\sigma)^6 + \dots \right] + \\
 & \lambda q \left[ P(y - \tau)x + \frac{\lambda^2 pq}{3!} P(y - 3\tau)(x - 2\sigma)^3 + \frac{(\lambda^2 pq)^2}{5!} P(y - 5\tau)(x - 4\sigma)^5 + \dots \right], \tag{3}
 \end{aligned}$$

Здесь  $P$  и  $Q$  следующие:

$$P(y) = C_0(y) + \lambda C_1(y) + \lambda^2 C_2(y) + \dots + \lambda^n C_n(y) + \dots$$

$$Q(y) = D_0(y) + \lambda D_1(y) + \lambda^2 D_2(y) + \dots + \lambda^n D_n(y) + \dots$$

произвольные функции, используя это произвольность функций из (3) находим разные частные решения заданной задачи. Например, мы можем взять  $P = Q = 0$ , или  $P = Q = 1$ . Тогда мы получаем простые решения заданной задачи с запаздывающим аргументом.

Литература:

1. М. С. Салахитдинов, Г. Н. Насритдинов. “Обыкновенные дифференциальные уравнение”, Тошкент, 1982 г.
2. Ш. Т. Максудов. Элементы линейных интегральных уравнений. Ташкент, 1975 (на узбекском языке).
3. И. И. Привалов. Интегральные уравнение. Гостехиздат, М. 1935.
4. У. В. Ловитт. Линейные интегральные уравнение. Гостехиздат, М. 1957.

## Сравнение методов оценки тональности текста

Павлов Юрий Николаевич, доктор технических наук, профессор;  
Майструк Кирилл Александрович, студент  
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

**Ключевые слова:** классификация текста, машинное обучение, обработка естественного языка, тональность текста

Анализ мнений — это тип обработки естественного языка для отслеживания настроения общественности о конкретном продукте. Анализ мнений, который также называют анализом тональности, включает в себя сбор и категоризацию мнений о продукте. Автоматизированный анализ тональности часто использует такой тип искусственного интеллекта как машинное обучение.

Анализ мнений может быть очень полезен во многих случаях. Например, он может помочь крупным компаниям оценить успех новых выпускаемых продуктов; понять, какие версии продуктов популярны; распознать, каким пользователям нравятся функции продукта, каким нет.

Кроме того, есть некоторые сложности анализа тональности. Например, слово, которое считается позитивным в одной ситуации, может быть негативным в другой. Возьмем для примера слово «долгий». Если пользователь говорит, что заряд батареи у ноутбука долгий, то это будет позитивное мнение. Если он говорит, что загрузка операционной системы была долгой, то это мнение будет негативным. Это означает, что система, обученная анализу мнений на одной функции продукта, не обязательно будет правильно работать на другой.

Количество отзывов пользователей в интернете достигает нескольких сотен тысяч. Очевидно, что оценка и обработка отзывов вручную становится невозможной.

В данной статье рассматривалась задача классификации тональности текстов.

Целью работы являлось сравнение методов оценки окраса и тональности текста, программная реализация системы классификации, оценка точности алгоритма.

### 1. Классификация тональности текста

Классификация — это соотношение некоторых входных данных с одним или несколькими классами. Классификация текста в исходном виде является невозможной, для начала надо разбить текст на некоторое понятное классификатору представление. Эта операция называется индексацией текста. Документ можно представить в виде вектора терминов, называемого векторной моделью [1].

Тональность — это эмоциональное отношение автора высказывания к некоторому объекту (объекту реального мира, событию, процессу или их свойствам/атрибутам), выраженное в тексте [2].

Основной целью анализа тональности является нахождение мнений в тексте и выявление их свойств. Какие именно свойства будут исследоваться, зависит уже от поставленной задачи.

В компьютерных программах автоматизированного анализа тональности применяют алгоритмы машинного обучения, инструменты статистики и обработки естественного языка, что позволяет обрабатывать большие массивы текста, включая веб-страницы, онлайн-новости, тексты дискуссионных групп в сети Интернет, онлайн-обзоры, веб-блоги и социальные медиа [2].

Существует множество методов классификации текстовых документов. Далее приведены только те, которые будут использованы в настоящей работе:

- логистическая регрессия (Logistic Regression);
- деревья решений (Decision tree);
- наивный байесовский классификатор (Naive Bayes Classifier);
- Random Forest;
- стохастический градиентный спуск (Stochastic Gradient Descent).

### 2. Выбор размеченного корпуса документов

В свободном доступе найден размеченный корпус документов на основе микроблоггинг-платформы twitter [3].

Для разметки на два класса (положительные и отрицательные), тестовая выборка отфильтрована, согласно следующим критериям:

- удалены все твиты, содержащие одновременно и положительные и отрицательные эмоции;

- как выяснилось, API twitter отдает в результатах выдачи копии twitter-постов, в связи с этим удалены одинаковые посты из выборки;
  - удалены малоинформативные твиты, длина которых составляла менее 40 символов.
- В результате получен тренировочный корпус, состоящий из 114911 положительных, 111923 отрицательных записей.

### 3. Основные этапы работы системы

Работа системы была разделена на три основных этапа:

- индексация документа;
- обучение классификатора;
- оценка качества работы классификатора.

### 4. Индексация документа

Первый этап предобработки корпуса документов — это приведение всех слов к начальной форме (лемматизация). Это позволит реализовать и использовать векторную модель документа, в которой каждое слово уникально. Для решения этой задачи использовался морфологический анализатор `rumorphy2` [4].

При индексации необходимо избавиться от слов, не несущих тональности текста. Это могут быть предлоги, союзы, знаки препинания. Они могут часто встречаться, при этом не нести никакой полезной нагрузки.

Затем необходимо выделить из корпуса документов ключевые слова. Для этого используется модель *TFIDF*, описанная ниже.

Иногда слова могут встречаться во многих документах текстовой коллекции. Следовательно, они не могут характеризовать принадлежность документа тому или иному классу, так как не являются ключевыми. Поэтому вводится так называемая мера *IDF* (обратная частота документа), которая понижает значимость частотных слов.

$$IDF = \ln \frac{D}{d} \quad (1)$$

где  $D$  — количество всех документов,  $d$  — количество документов, в которых содержится данное слово. Таким образом, чем чаще слово встречается, тем меньше его *IDF*.

Мера *TF* (term frequency) — отношение частоты некоторого слова к общему числу слов в документе. Мера оценивает важность слов в пределах документа.

*TFIDF* равен произведению *TF* и *IDF*. Таким образом, *TF* является повышающим множителем, а *IDF* — понижающим. Больший вес получают слова, которые часто встречаются в одном документе, но редко в других.

На выходе получается список вида:

документ 1	слово 11: < <i>tfidf</i> >	слово 12: < <i>tfidf</i> >	...	слово 1a: < <i>tfidf</i> >
документ 2	слово 21: < <i>tfidf</i> >	слово 22: < <i>tfidf</i> >	...	слово 2b: < <i>tfidf</i> >
...	...	...	...	...
документ $i$	слово $i1$ : < <i>tfidf</i> >	слово $i2$ : < <i>tfidf</i> >	...	слово $ij$ : < <i>tfidf</i> >
...	...	...	...	...
документ $n$	слово $n1$ : < <i>tfidf</i> >	слово $n2$ : < <i>tfidf</i> >	...	слово $nz$ : < <i>tfidf</i> >

посмотрев на который, можно отсеять термы с заведомо низким *tfidf*.

### 5. Обучение классификатора

В алгоритмах классификации происходит сравнение текста, поступающего на вход, с ранее размеченным корпусом документов по мере близости. Далее происходит классификация текста какому-либо известному классу на основании результатов сравнения.

Обучение состоит в выборе общей формы классифицирующего правила с множеством различных параметров. Предварительно производится выбор параметров на обучающем наборе документов.

Для обучения классификатора использовались готовые методы из библиотеки `scikit-learn` [5].

### 6. Оценка результатов классификации

Как оценивать качество алгоритма? Допустим, вы хотите внести изменения в алгоритм. Откуда вы знаете, что эти изменения сделают алгоритм лучше? Конечно же, надо проверять алгоритм на реальных данных. Качество постро-

енного классификатора оценивается по его ошибке на тестовом подмножестве обучающего множества документов. Ошибка — это доля неправильных решений классификатора. Решения классификатора сравнивают с решениями экспертов, формирующих обучающее множество [6].

Для расчета качества в задачах анализа данных необходимо составить таблицу категорий принятых решений (табл. 1).

Таблица 1. Таблица категорий

Категория i		Экспертная оценка	
		Положительная	Отрицательная
Оценка системы	Положительная	TP	FP
	Отрицательная	FN	TN

В таблице содержится информация о том, сколько раз система приняла верное и неверное решения по заданным классам:

- TP — истинно-положительное решение;
- FP — ложно-положительное решение;
- FN — ложно-отрицательное решение;
- TN — истинно-отрицательное решение.

Точность (precision) — доля документов, являющихся положительными от общего числа примеров, классифицированных как положительные.

$$P = \frac{TP}{TP + FP} \tag{2}$$

Полнота (recall) — доля правильно классифицированных положительных примеров от общего числа положительных примеров.

$$R = \frac{TP}{TP + FN} \tag{3}$$

F-мера (F-measure) — мера, комбинирующая точность и полноту.

$$F = \frac{2 * precision * recall}{precision + recall} \tag{4}$$

Оценить качество классификации — сложная задача. Даже опытные эксперты иногда не могут соотнести конкретный документ с какой-либо категорией. Возникает вопрос: чего в таком случае можно ожидать от компьютера?

Существуют два подхода к оценке качества классификации. Первый основан на сравнении классификаторов между собой. Вторым является абсолютной оценкой.

В данной работе используется абсолютная оценка качества, которая включает в себя оценку таких метрик, как точность, полнота и F-мера. Метрики вычисляются путем кросс-валидации обучающего множества.

### 7. Рассчитанные метрики и матрицы неточностей

В этом разделе выполнялось тестирование классификатора на разных алгоритмах машинного обучения. По каждому тесту приведены матрицы неточностей и таблицы с рассчитанными метриками. Также приведена сводная таблица по всем методам классификации.

#### Наивный байесовский классификатор

Таблица 2. Отчет по метрикам

class	precision	recall	f1-score
0	0.63	0.73	0.67
1	0.68	0.56	0.61
avg/total	0.65	0.65	0.64

Таблица 3. Матрица неточностей

		Экспертная оценка	
		Положительная	Отрицательная
Оценка системы	Положительная	14637	5363
	Отрицательная	8738	11262

**Логистическая регрессия**

Таблица 4. Отчет по метрикам

class	precision	recall	f1-score
0	0.7	0.64	0.67
1	0.67	0.73	0.7
avg/total	0.68	0.68	0.68

Таблица 5. Матрица неточностей

		Экспертная оценка	
		Положительная	Отрицательная
Оценка системы	Положительная	12762	7238
	Отрицательная	5425	14575

**Random forest**

Таблица 6. Отчет по метрикам

class	precision	recall	f1-score
0	0.64	0.57	0.61
1	0.62	0.68	0.65
avg/total	0.63	0.63	0.63

Таблица 7. Матрица неточностей

		Экспертная оценка	
		Положительная	Отрицательная
Оценка системы	Положительная	11462	8538
	Отрицательная	6318	13682

**Деревья решений**

Таблица 8. Отчет по метрикам

class	precision	recall	f1-score
0	0.64	0.65	0.65
1	0.65	0.64	0.64
avg/total	0.64	0.64	0.64

Таблица 9. Матрица неточностей

		Экспертная оценка	
		Положительная	Отрицательная
Оценка системы	Положительная	13052	6948
	Отрицательная	7279	12721

## СТОХАСТИЧЕСКИЙ ГРАДИЕНТНЫЙ СПУСК

Таблица 10. Отчет по метрикам

class	precision	recall	f1-score
0	0.7	0.44	0.54
1	0.59	0.81	0.68
avg/total	0.64	0.63	0.61

Таблица 11. Матрица неточностей

		Экспертная оценка	
		Положительная	Отрицательная
Оценка системы	Положительная	8893	11107
	Отрицательная	3879	16121

### Сводная таблица по всем методам

Таблица 12. Сводная таблица

Algorithm	precision	recall	F-measure
<b>Naïve Bayes</b>	0.65	0.65	0.64
<b>Logistic Regression</b>	0.68	0.68	0.68
<b>Random Forest</b>	0.63	0.63	0.63
<b>Decision Tree</b>	0.64	0.64	0.64
<b>Stochastic Gradient Descent</b>	0.64	0.63	0.61

Из таблицы видно, что логистическая регрессия показывает самое лучшее и вполне достойное качество классификации из всех выбранных алгоритмов.

### Заключение

В данной работе рассматривалась задача классификации тональности текстов постов, распаршенных из социальной сети Twitter.

Рассмотрены несколько алгоритмов машинного обучения, рассмотрена модель TFIDF. Проанализированы подходы к классификации тональности корпуса документов. Расписана методика тестирования качества классификации, а именно:

- расчет точности;
- расчет полноты;
- расчет f-меры, комбинирующей точность и полноту.

Выбран размеченный корпус документов на основе микроблоггинг-платформы twitter. Расписаны этапы работы классификатора:

- индексация документа;
- обучение классификатора;
- оценка качества работы классификатора.

Корпус документов был отлемматизирован и были найдены ключевые слова. Приведена сводная таблица оценки качества по пяти алгоритмам машинного обучения, на которых классификатор был обучен. Выбран алгоритм, показывающий самую высокую точность классификации.

### Литература:

1. Задача классификации — Википедия: [Электронный ресурс]. URL: [http://ru.wikipedia.org/wiki/Задача\\_классификации](http://ru.wikipedia.org/wiki/Задача_классификации) (дата обращения: 15.11.2015).

2. Анализ тональности текста — Википедия: [Электронный ресурс]. URL: [http://ru.wikipedia.org/wiki/Анализ\\_тональности\\_текста](http://ru.wikipedia.org/wiki/Анализ_тональности_текста) (дата обращения: 15.11.2015).
3. Ю.В. Рубцова. Построение корпуса текстов для настройки тонового классификатора // Программные продукты и системы, 2015, № 1 (109), — С.72–78.
4. Korobov, M.: Morphological Analyzer and Generator for Russian and Ukrainian Languages // Analysis of Images, Social Networks and Texts, pp 320–332 (2015).
5. scikit-learn: machine learning in Python: [Электронный ресурс]. URL: <http://scikit-learn.org> (дата обращения: 30.11.2015).
6. Боярский, К. К. Введение в компьютерную лингвистику. Учебное пособие. — СПб: НИУ ИТМО, 2013. — 72 с.

## О спектре тензорной суммы интегральных операторов

Расулов Тулкин Хусенович, кандидат физико-математических наук, доцент  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Тошева Наргиза Абдуллаевна, преподаватель  
2-академический лицей при Бухарский государственный медицинский институт

Пусть  $H_1$  и  $H_2$  — бесконечномерные гильбертовы пространства и  $H = H_1 \otimes H_2$  — их тензорное произведение [1,2]. Рассмотрим линейные ограниченные самосопряженные операторы  $A_1$  и  $A_2$ , действующие в  $H_1$  и  $H_2$ , соответственно. Обозначим через  $A_1 \otimes A_2$  тензорное произведение [1] операторов  $A_1$  и  $A_2$ . Оператор  $A_1 \otimes A_2$  также является линейным ограниченным самосопряженным оператором, действующим в гильбертовом пространстве  $H$ . Положим  $A := A_1 \otimes I_1 + I_2 \otimes A_2$ , где  $I_1$  и  $I_2$  — тождественные операторы в  $H_1$  и  $H_2$ , соответственно. Оператор  $A$  мы будем называть тензорной суммой  $A_1$  и  $A_2$ , и будем обозначать через  $A_1 \oplus A_2$ . Оператор  $A_1 \oplus A_2$  также является линейным ограниченным самосопряженным оператором [1], действующим в гильбертовом пространстве  $H$ .

Обозначим через  $\sigma(\cdot)$ ,  $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$  и  $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ , соответственно, спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

Для спектров операторов  $A_1 \otimes A_2$  и  $A_1 \oplus A_2$  верны равенства [1]:

$$\sigma(A_1 \otimes A_2) = \sigma(A_1) \cdot \sigma(A_2) = \{w \in \mathbb{R} : w = \mu \cdot \lambda, \mu \in \sigma(A_1), \lambda \in \sigma(A_2)\}$$

и

$$\sigma(A_1 \oplus A_2) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2) = \{w \in \mathbb{R} : w = \mu + \lambda, \mu \in \sigma(A_1), \lambda \in \sigma(A_2)\}.$$

Очевидно, что если  $\mu \in \sigma_{\text{disc}}(A_1)$  и  $\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(A_2)$ , то  $\mu + \lambda \in \sigma_{\text{disc}}(A_1 \oplus A_2)$ .

В квантовой теории поля [3,4], физики твердого тела [5], а также в механике сплошных сред [6,7], аэродинамике [8] и других областях физики и механике встречаются частично — интегральные операторы вида

$$(Af)(x, y) = \int_a^b K_1(x, t) f(t, y) dt + \int_a^b K_2(t, y) f(x, t) dt + \int_a^b \int_a^b K(x, y, s, t) f(s, t) ds dt, \quad (1)$$

действующие в гильбертовом пространстве  $L_2([a, b]^2)$  квадратично — интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на  $[a, b]^2$ . Здесь функции  $K_i(\cdot, \cdot)$ ,  $i = 1, 2$  непрерывны на  $[a, b]^2$ , а функция  $K(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  непрерывна на  $[a, b]^4$ .

Данная работа посвящена изучению существенного и дискретного спектров операторов  $A$  в случае

$$K_i(x, y) = a_i(x) a_i(y), \quad i = 1, 2, \quad K(x, y, t) \equiv 0,$$

где  $a_i(\cdot)$ ,  $i = 1, 2$  — вещественнозначные непрерывные функции на  $[a, b]$ . Тогда оператор  $A$  имеет следующий вид

$$(Af)(x, y) = a_1(x) \int_a^b a_1(t) f(t, y) dt + a_2(y) \int_a^b a_2(t) f(x, t) dt.$$

Наряду с оператором  $A$ , рассмотрим еще оператор  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , действующий в гильбертовом пространстве  $L_2[a, b]$  по формуле

$$(A_i f)(x) = a_i(x) \int_a^b a_i(t) f(t) dt, \quad i = 1, 2, \quad f \in L_2[a, b].$$

Из определения операторов  $A$  и  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , получим, что оператор  $A$  можно представить как тензорная сумма  $A = A_1 \otimes I + I \otimes A_2$ . Здесь  $I$  означает тождественный оператор в  $L_2[a, b]$ .

В данной работе будем изучать спектральные свойства оператора  $A$  с помощью тензорной суммы операторов.

Видно, что

$$\text{Im } A_i = \{y \in L_2[a, b] : y(x) = C_i a_i(x), C_i \in C\}.$$

Поэтому  $\dim \text{Im } A_i = 1$ , т. е.  $A_i$  есть одномерный оператор.

Множество всех изолированных точек спектра  $\sigma(A_i)$  самосопряженного оператора  $A_i$ , за исключением собственных значений бесконечной кратности оператора  $A_i$ , будем называть дискретным спектром оператора  $A_i$ .

Множество  $\sigma_{\text{ess}}(A_i) = \sigma(A_i) \setminus \sigma_{\text{disc}}(A_i)$  называется существенным спектром оператора  $A_i$ .

Следующая лемма описывает спектра оператора  $A_i$ .

**Лемма 1.** Для существенного спектра оператора  $A_i$ ,  $i=1,2$  имеет места равенства  $\sigma_{\text{ess}}(A_i) = \{0\}$ .

Оператор  $A_i$ ,  $i=1,2$  имеет единственное простое собственное значение равное  $\|a_i\|^2$ .

Теперь сформулируем основной результат работы.

**Теорема 1.** Имеет место равенства

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \{0, \|a_1\|^2, \|a_2\|^2\};$$

$$\sigma_{\text{disc}}(A) = \{\|a_1\|^2 + \|a_2\|^2\}.$$

**Доказательство.** Как отметили выше из определения операторов  $A$  и  $A_i$ ,  $i=1,2$  получим, что оператор  $A$  можно представить как тензорная сумма  $A = A_1 \otimes I + I \otimes A_2$ . Поэтому для спектра оператора  $A$  имеем

$$\sigma(A) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2) = \{\xi \in R : \xi = \mu + \lambda, \mu \in \sigma(A_1), \lambda \in \sigma(A_2)\}.$$

В силу леммы 1 имеем

$$\sigma_{\text{ess}}(A_i) = \{0\}, \sigma_{\text{disc}}(A_i) = \{\|a_i\|^2\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}(A) &= \{\sigma_{\text{ess}}(A_1) + \sigma_{\text{ess}}(A_2)\} \cup \{\sigma_{\text{ess}}(A_1) + \sigma_{\text{disc}}(A_2)\} \cup \{\sigma_{\text{disc}}(A_1) + \sigma_{\text{ess}}(A_2)\} \\ &= \{0, \|a_1\|^2, \|a_2\|^2\}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{disc}}(A) = \sigma_{\text{disc}}(A_1) + \sigma_{\text{disc}}(A_2) = \{\|a_1\|^2 + \|a_2\|^2\}.$$

Теорема 1 доказана.

В работе [9], модельный оператор, ассоциированный с системой трех частиц на  $d$ -мерной решетке рассматривается как тензорная сумма моделей Фридрикса. Найден явный вид существенного и дискретного спектра этого модельного оператора.

Литература:

1. М. Рид, Б. Саймон, Методы современной математической физики, Т. 1: Функциональный анализ. М.: Мир, 1977, 360 с.
2. Ф. А. Березин, М. А. Шубин. Уравнение Шредингера. М.: Изд-во МГУ, 1983, 392 с.
3. В. А. Какичев, Н. В. Коваленко. К теории двумерных интегральных уравнений с частными интегралами. Укр. Мат. Журн. Т. 23, № 3, с. 302–312.
4. К. О. Фридрихс. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969.
5. А. I. Mogilner. Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schroedinger operators: problems and results. Advances in Sov. Math., — 1991, — V. 5, P. 139–194.
6. В. М. Александров, Е. В. Коваленко. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986.
7. V. M. Aleksandrov, E. V. Kovalenko. On some class of integral equations arising in mixed boundary value problems of continuous mechanics. Soviet Phys. Dokl. — 1980, V. 25, N. 2, P. 354–356.
8. А. С. Калитвин. О некотором классе частично интегральных уравнений в аэродинамике. Состояние и перспектива развития наук и технике под Липецком. — 1994, с. 210–212.
9. Т. Х. Расулов, Б. И. Бахронов. О спектре тензорной суммы моделей Фридрикса. Молодой ученый. № 9 (89), 2015, с. 17–20.

## Нули определителя Фредгольма, соответствующие одной блочно-операторной матрице

Худаяров Санат Самадович, старший преподаватель  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Блочно-операторные матрицы — это матрицы, элементы которых являются линейными операторами, определенными между банаховым или гильбертовым пространством. Такие операторы возникают в статистической физике, теории твердого тела, теории химических реакции, магнито-гидродинамике, квантовой механике и т.д. Недавно в монографии [1] подробно изучены абстрактные свойства ограниченных и неограниченных блочно-операторных матриц и их применения в некоторых задачах математической физики.

В настоящей работе рассматривается блочно операторная матрица  $A$ , действующая в так называемом двухчастичном обрезанном подпространстве Фоковского пространства. Изучен нули определителя Фредгольма соответствующей оператору  $A$ .

Отметим, что оператор  $A$  можно рассмотреть как одномерное возмущение оператора  $A_0$ , рассмотренного в работах [2, 3], где изучены пороговые явления для оператора  $A_0$ .

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — компактное связанное множество,  $L_2(\Omega)$  — гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на  $\Omega$  и  $C$  — одномерное комплексное пространство.

Обозначим

$$H_0 = C, \quad H_1 = L_2(\Omega), \quad H = H_0 \oplus H_1.$$

Гильбертово пространство  $H$  называется *двухчастичным обрезанным подпространством* Фоковского пространства.

Рассмотрим блочно-операторную матрицу  $A$  действующую в гильбертовом пространстве  $H$  и задающуюся как

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где матричные элементы  $A_j : H_j \rightarrow H_i$ ,  $i, j = 0, 1$  определяются по формулам

$$(A_{00}f_0)_0 = \omega_0 f_0, \quad (A_{01}f_1)_0 = \int v_0(s) f_1(s) ds,$$

$$A_{11} = A_{11}^0 - v, \quad (A_{11}^0 f_1)_1(p) = w_1(p) f_1(p), \quad (v f_1)_1(p) = v_1(p) \int v_1(s) f_1(s) ds.$$

Здесь  $f_i \in H_i$ ,  $i = 0, 1$ ,  $w_0$  — фиксированное вещественное число,  $v_i(\cdot)$ ,  $i = 0, 1$  — вещественнозначные непрерывные (ненулевые) функции на  $\Omega$ . Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

В современной математической физике оператор  $A_{01}$  называется оператором уничтожения, а оператор  $A_{10}$  называется оператором рождения, см. [4].

Легко можно проверить, что оператор  $A$ , определенный операторной матрицей (1) и действующий в гильбертовом пространстве  $H$ , является ограниченным и самосопряженным.

Обозначим через  $\sigma_{ess}(\cdot)$  и  $\sigma_{disc}(\cdot)$ , соответственно, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

Пусть оператор  $A_0$  действует в  $H$  как

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{11}^0 \end{pmatrix}$$

Оператор возмущения  $A - A_0$  оператора  $A_0$  является ограниченным самосопряженным оператором ранга не более чем 3. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора  $A$  совпадает с существенным спектром оператора  $A_0$ . Известно, что

$$\sigma_{ess}(A_0) = [m; M],$$

где числа  $m$  и  $M$  определяются равенствами

$$m = \min_{p \in \Omega} \omega_1(p), \quad M = \max_{p \in \Omega} \omega_1(p).$$

Из последних двух фактов следует, что

$$\sigma_{ess}(A) = [m; M].$$

Далее, для формулировки результата работы вводим операторы

$$A_1 \equiv A_{11} \text{ и } A_2 = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10}^* & A_{11}^0 \end{pmatrix}.$$

Из определения операторов  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , видно, что они имеют более простую структуру чем  $A$ .

Определим регулярные в  $C \setminus [m; M]$  функции (определитель Фредгольма, ассоциированный с оператором  $A_1, A_2, A$ , соответственно)

$$\Delta_1(z) = 1 - \int \frac{v_1^2(s) ds}{\omega_1(s) - z}, \quad \Delta_2(z) = \omega_0 - z - \int \frac{v_0^2(s) ds}{\omega_1(s) - z},$$

$$\Delta(z) = \Delta_1(z)\Delta_2(z) - \left( \int \frac{v_1(s)v_2(s) ds}{\omega_1(s) - z} \right)^2.$$

Теперь установим связь между собственными значениями оператора  $A$  и нулями функции  $\Delta(\cdot)$ . Верна следующая

**Теорема 1.** Число  $z \in C \setminus [m; M]$  является собственным значением оператора  $A$  тогда и только тогда, когда  $\Delta(z) = 0$ .

**Теорема 2.** Число  $z \in C \setminus [m; M]$  является собственным значением оператора  $A_i$ ,  $i = 1, 2$  тогда и только тогда, когда  $\Delta_i(z) = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Литература:

1. C. Tretter. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008.
2. Т.Х. Расулов. О существовании виртуального уровня обобщенной модели Фридрихса. Узб. Матем. Журнал. 2007, № 4, стр. 56–63.
3. Т.Х. Расулов. О собственных значениях обобщенной модели Фридрихса. Узбекский математический журнал, 2006, № 4, стр. 61–68.
4. К.О. Фридрихс. Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1972.

## Решение транспортной задачи с помощью программного обеспечения

Шульгина-Таращук Алевтина Сергеевна, магистр, преподаватель  
 Карагандинский государственный университет имени Е. А. Букетова (Казахстан)

Цель работы — научиться составлять оптимальный план для транспортных средств на производстве с учетом ограничений, используя материальные запасы для транспортной задачи, получив оптимизацию планов математическими компьютерными методами линейного программирования посредством применения Solver из программы Microsoft Excel [1].

План транспортных средств представляется в табличной форме, включая количество производственных запасов на складах поставщиков и необходимое количество для потребителя в естественном выражении. При разработке плана производственная цель определена: минимизация расходов транспортировки [2].

### Математическая модель для алгоритма оптимизации

Общее утверждение транспортной проблемы включает определение оптимального плана транспортных средств некоторого груза от  $m$  пунктов отправления  $A_1, A_2, \dots, A_m$  до  $n$  мест назначения  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Как критерий оптимальности берем или минимальную стоимость транспортных средств всего груза, или минимальное время его поставки [3].

Пусть  $c_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ) — тарифы транспортировки единицы груза от  $i$  пункта отправления до  $j$  места назначения;  $a_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) — груз  $i$  пункта;  $b_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) — требование для груза в  $j$  месте назначения;  $x_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ) — количество единиц груза, транспортируемых от  $i$  пункта отправления до  $j$  места назначения. Тогда экономико-математическая постановка задачи заключается в определении минимального значения функции:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

с условиями

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & (i = \overline{1, m}) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & (j = \overline{1, n}) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \end{cases} \tag{2}$$

Если потребности в грузовых пунктах назначения равны грузовым резервам в пунктах отправления, т.е.

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m a_i, \tag{3}$$

тогда модель транспортной задачи называют закрытой, иначе — открытая.

**Постановка задачи**

Однородный груз в количестве 50, 30 и 10 единиц поступил на три базы  $A_1, A_2, A_3$ . Этот груз требуется до-

ставить в четыре места назначения  $B_1, B_2, B_3, B_4$  соответственно в количествах 30, 20, 10 и 20 единиц. Тарифы транспортных средств единицы груза даны в таблице 1. Найти оптимальный план транспортных средств транспортной задачи.

**Табличная модель**

Оформим план в форме таблицы:

Таблица 1. Транспортные тарифы

	<b>А</b>	<b>В</b>	<b>С</b>	<b>Д</b>	<b>Е</b>	<b>Ф</b>
1	Транспортная задача (minimum)					
2	Поставщики	Потребители				Запас
3		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
4	$A_1$	1	2	4	1	50
5	$A_2$	2	3	1	5	30
6	$A_3$	3	2	4	4	10
7	Потребность	30	20	10	20	

После того, чтобы получить таблицу плана, необходимо составить формулы для вычислений (таблицы 2 и 3).

Таблица 2. Представление формул и входных данных

...	<b>А</b>	<b>В</b>	<b>С</b>	<b>Д</b>
8				
9		$B_1$	$B_2$	$B_3$
10	$A_1$			
11	$A_2$			
12	$A_3$			
13	Импортировано	=SUM (B10: B12)	=SUM (C10: C12)	=SUM (D10: D12)

Таблица 3. Продолжение таблицы 2

<b>Е</b>	<b>Ф</b>	<b>Г</b>
$B_4$	Экспортировано	Остатки
	= SUM (B10: E10)	= F4 - F10
	= SUM (B11: E11)	= F5-F11
	= SUM (B12: E12)	= F6-F12
= SUM (E10: E12)		

На первых уроках нецелесообразно автоматизировать работу для планирования экспериментов и обработки результатов, поскольку студент получает готовые результаты, не показав действий, творчества. После ручного контроля эксперимента, когда понимание и знание объекта исследования улучшились, возможно начать автоматизацию планирования и управление экспериментом: изменяя число доставок в ячейках  $B_{10}:E_{12}$ , сокращая

расходы в ячейке G13. В то же время визуально управлять расходом запасов в колонке G. Расход не должен превышать резервы на складе (колонка F).

Посредством программы оптимизации мы можем облегчить реализацию этой задачи. После выбора Поиск Решения в MS Exsell появится диалоговое окно, в котором мы установим следующие условия, показанные на рисунке 1:

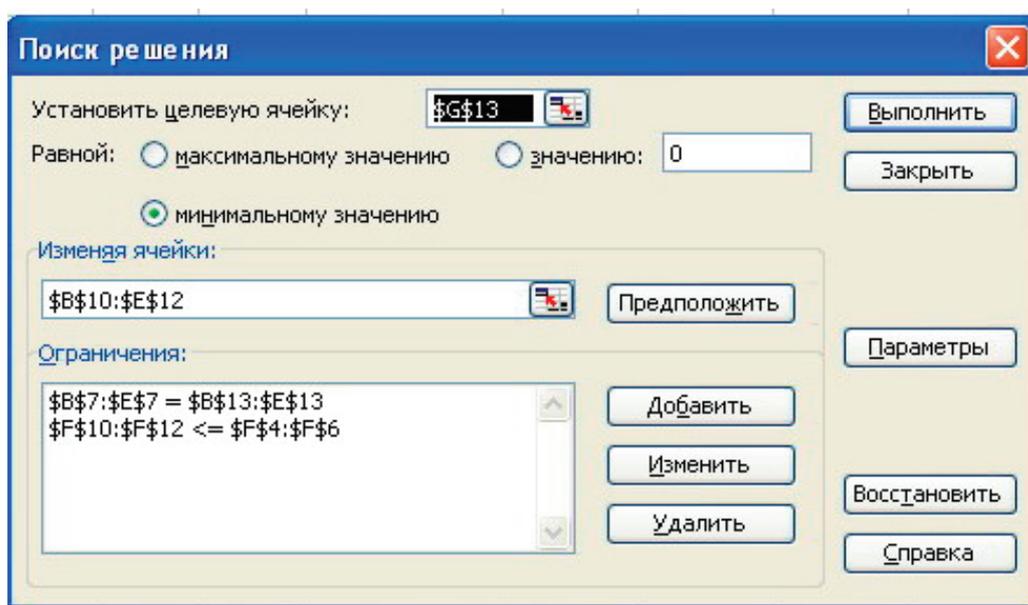


Рис. 1. Диалоговое окно Поиск решения

Мы принимаем модель как линейную, Рисунок 2:

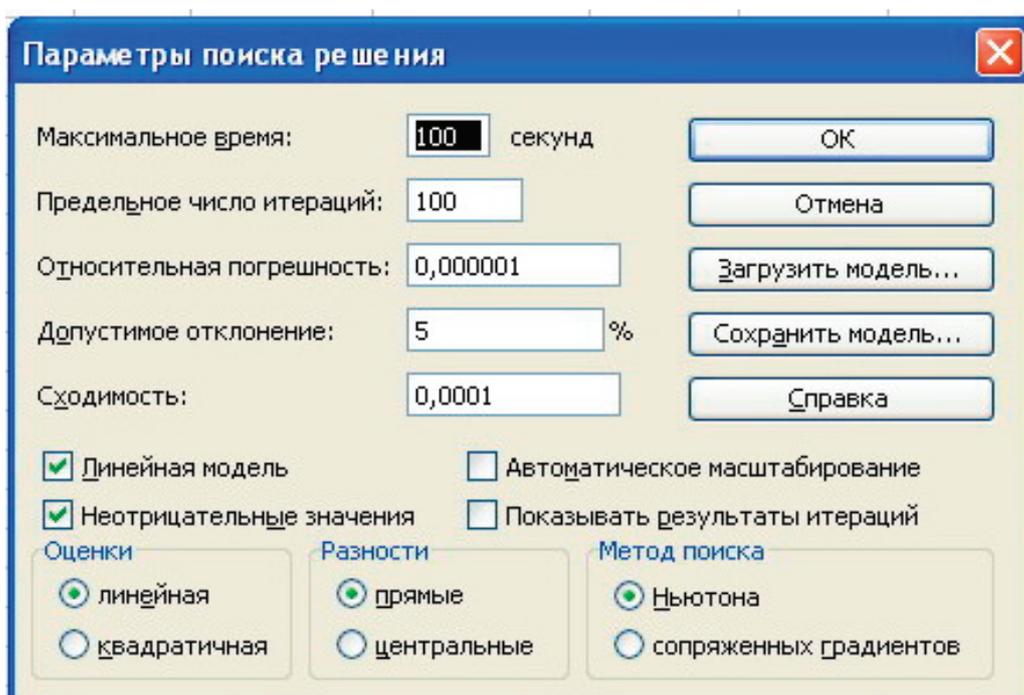


Рис. 2. Диалоговое окно «Параметры Поиска решения»

После нажатия на кнопку «Выполнить», получаем результат, приведенный в таблице 4.

Таблица 4. Полученные результаты

	A	B	C	D		F	G
8							
9		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	Экспортировано	Остатки
10	$A_1$	20	10	0	20	50	0
11	$A_2$	10	0	10	0	20	10
12	$A_3$	0	10	0	0	10	0
13	Импортировано	30	20	10	20	Об затраты	110

Таким образом, достигнуты минимальные расходы при ограничениях запасов на складах поставщиков. Упростить и ускорить поиск прибыли помогла программа Solver, которая рационализировала решение этой экономической задачи [4].

Литература:

1. Горчаков, А. А. Компьютерные экономико-математические модели. М.: ЮНИТИ, 1995. — 201 с.
2. Додж, М. Эффективная работа с Microsoft Excel 2000. СПб.: Питер, 2001. — 161 с.
3. Замков, О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике. — М.: Изд. «ДИС», 2001. — 368 с.
4. Шелобаев, С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. Изд. Юнити, 2001. — 367 с.
5. Бережная, Е. В., Бережной В. И. Математические методы моделирования экономических систем. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Финансы и статистика, 2006. — 432 с.

## Кубический числовой образ на примерах

Элмуродова Хилола Ботировна, преподаватель  
Бухарский филиал Ташкентского института ирригации и мелиорации (Узбекистан)

Для линейного оператора  $A$  в гильбертовом пространстве  $H$  с областью определения  $D(A)$  множество  $W(A) := \{(Ax, x) : x \in D(A), \|x\| = 1\}$  называется его числовым образом. Известно, что точечный спектр  $\sigma_p(A)$  оператора  $A$  лежит в  $W(A)$ , а его аппроксимативно точечный спектр  $\sigma_{app}(A)$  содержится в  $\overline{W(A)}$ , см. например [1].

Для того, чтобы получить более точную информацию о спектре, в работе [2] введено понятие квадратичный числовой образ, затем изучена в работе [3]. Это множество определено, если дано разложение  $H = H_1 \oplus H_2$  и  $A \in L(H)$ , где  $H_1$  и  $H_2$  гильбертово пространство, а  $L(H)$  пространство линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда оператор  $A$  всегда записывается в виде блочно-операторной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

с линейными ограниченными операторами  $A_{ij} : H_j \rightarrow H_i$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Для полноты дадим определение квадратичной численной области значений оператора  $A$ . Пусть  $(\cdot, \cdot)_i$  и  $\|\cdot\|_i$  — скалярное произведение и норма в  $H_i$ ,  $i = 1, 2$ , соответственно. Множество всех собственных значений матрицы

$$A_f = \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1)_1 & (A_{12}f_2, f_1)_1 \\ (A_{21}f_1, f_2)_2 & (A_{22}f_2, f_2)_2 \end{pmatrix}, \quad f = (f_1, f_2) \in H$$

таких, что  $\|f_i\|_i=1, i=1,2$  называется квадратичной числовой образ оператора  $A \in L(H)$ , соответствующей представлению (1) блочно-операторной матрицы  $A$  и обозначается как  $W^2(A)$ , т. е.  $W^2(A) = \bigcup_{\|f_i\|_i=1, i=1,2} \sigma_p(A_f), f=(f_1, f_2) \in H$ .

Пусть теперь дано прямая сумма  $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$  трех гильбертовых пространствах  $H_1, H_2$  и  $H_3$ , а также оператор  $B \in L(H)$ . Тогда оператор  $B$  всегда записывается в виде блочно-операторной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{32} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \tag{2}$$

с линейными ограниченными операторами  $B_{ij} : H_j \rightarrow H_i, i, j=1,2,3$ .

Множество всех собственных значений матрицы

$$B_f = \begin{pmatrix} (B_{11}f_1, f_1)_1 & (B_{12}f_2, f_1)_1 & (B_{13}f_3, f_1)_1 \\ (B_{21}f_1, f_2)_2 & (B_{22}f_2, f_2)_2 & (B_{23}f_3, f_2)_2 \\ (B_{31}f_1, f_3)_3 & (B_{32}f_2, f_3)_3 & (B_{33}f_3, f_3)_3 \end{pmatrix}, f=(f_1, f_2, f_3) \in H$$

таких, что  $\|f_i\|_i=1, i=1,2,3$  называется кубической числовой образ оператора  $B \in L(H)$ , соответствующей представлению (2) блочно-операторной матрицы  $B$  и обозначается как  $W^3(B)$ , т. е.  $W^3(B) = \bigcup_{\|f_i\|_i=1, i=1,2,3} \sigma_p(B_f), f=(f_1, f_2, f_3) \in H$ .

Для двум различным разложениям гильбертового пространства  $H$ , могут соответствовать различные кубические числовые образы. Приведем некоторые факты и примеры. Заметим, что кубическая числовая образ всегда содержится в числовом образе:  $W^3(A) \subset W(A)$ . При этом если операторная матрица  $B$  имеет нижнюю или верхнюю треугольную форму, т. е.

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix},$$

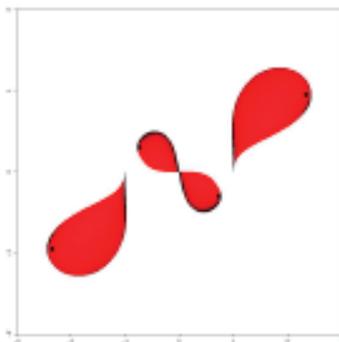
то  $W^3(B) = W(B_{11}) \cup W(B_{22}) \cup W(B_{33})$ .

Аналогично числового образа значений, кубический числовой образ ограниченной блочно-операторной матрицы  $A$  является ограниченным подмножеством множество  $C : W^3(A) \subset \{\lambda \in C : |\lambda| \leq \|A\|\}$  и оно замкнуто если  $\dim H < \infty$ .

**Пример 1.** Кубический числовой образ матрицы  $4 \times 4$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3i \\ -1 & -2 & 3i & 0 \end{pmatrix}$$

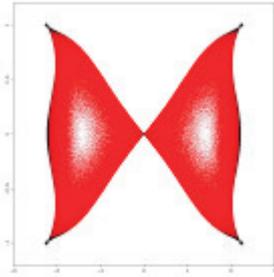
соответствующий разложений  $C^4 = C^2 \oplus C \oplus C$  имеет вид:



**Пример 2.** Кубический числовой образ матрицы  $4 \times 4$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 & 0 \\ i & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & i \\ 0 & 1 & i & -2 \end{pmatrix}$$

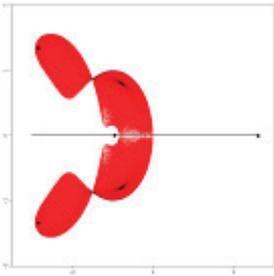
соответствующий разложениям  $C^4 = C \oplus C^2 \oplus C$  имеет вид:



**Пример 3.** Кубический числовой образ матрицы  $4 \times 4$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3i \\ -1 & -2 & 3i & 0 \end{pmatrix}$$

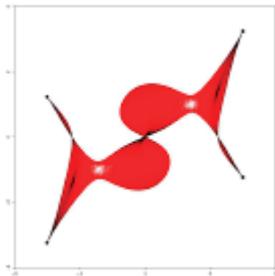
соответствующий разложениям  $C^4 = C \oplus C \oplus C^2$  имеет вид:



**Пример 4.** Кубический числовой образ матрицы  $4 \times 4$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3+i & 2 & i \\ 3+i & 1 & i & 2 \\ -2 & i & 1 & 3+i \\ i & -2 & 3+i & 1 \end{pmatrix}$$

соответствующий разложениям  $C^4 = C \oplus C^2 \oplus C$  имеет вид:



Литература:

1. Т. Като. Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир, 1972.
2. H. Langer, C. Tretter. Spectral decomposition of some nonselfadjoint block operator matrices. J. Operator Theory, 39:2 (1998), 339–359.
3. H. Langer, A. S. Markus, V. I. Matsaev, C. Tretter. A new concept for block operator matrices: the quadratic numerical range. Linear Algebra Appl., 330:1–3 (2001), 89–112.

## ФИЗИКА

### Спектроскопия импеданса пористого кремния и применение его в медицине<sup>1</sup>

Атаев Владислав Владимирович, студент

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» имени В. И. Ульянова (Ленина)

*Данная статья является частью научно-исследовательской работы и магистерской диссертации, выполненной по плану обучения в магистратуре СПбГЭТУ «ЛЭТИ» в рамках дисциплины «Междисциплинарный курсовой проект» [1–5]. Данная статья написана по результату прохождения практики в СПбГЭТУ «ЛЭТИ», в ходе которой были измерены образцы пористого кремния методом спектроскопии импеданса в различных газовых средах, был проведен анализ полученных результатов.*

В середине 90-х г. было продемонстрировано, что пористый кремний с высокой степенью пористости может обладать фотолюминесцентными свойствами [6–8]. Технологические особенности пористого кремния подробно разобраны в [9–12]. На основе пористого кремния создаются газочувствительные сенсоры [13–16]. В последнее время особый интерес представляют его биоактивные свойства [17–19]. Его можно использовать для загрузки, хранения, транспортировки и высвобождения лекарственных веществ. Использование адресной доставки препарата к поражённому участку организма, позволяет повысить эффективность лекарства и снизить побочные негативные эффекты от него.

Преимущества пористого кремния заключаются:

- в биосовместимости, т.е. способности встраиваться в организм, не оказывая побочного влияния на него;
- в биodeградируемости, т.е. способности растворяться и выводиться из организма;
- в возможности управления характеристиками пористого кремния
- технологичность;
- многофункциональность [20].

Лекарство может быть введено при помощи адсорбцией лекарственных препаратов.

Важной особенностью взаимодействия лекарственных препаратов с пористыми носителями будут зависеть от технологических условий получения пористого кремния. Поэтому необходимо выработать методы состояния поверхности пористого кремния, одним из таких методов является метод спектроскопии импеданса. Этот метод позволяет определять отклик образца при приложении переменного возмущения, полученные результаты могут быть описаны на основе теоретического рассмотрения процессов и создания физической модели, и при помощи конструирования электрической эквивалентной схемы из простейших элементов, таких как сопротивление и емкость, которые ведут себя на подобие ячейки.

Целью работы являлось получение образцов пористого кремния и анализ полученных образцов методом спектроскопии импеданса в присутствии паров изопропилового спирта.

В ходе выполнения работы были получены образцы пористого кремния методом электрохимического анодного травления. Образцы были получены из монокристаллического кремния марок КДБ 10 (100) и КДБ 12 (111) с помощью метода Унно-Имаи (методика жидкостного контакта). Технологические условия получения образцов пористого кремния представлены в таблице 1.

Таблица 1. Технологические условия получения пористого кремния

Серия	Марка исходного материала	Время, мин.	Плотность тока анодирования, мА/см <sup>2</sup>
1	КДБ 10 (100)	10	20
2	КДБ 12 (111)	10	20

<sup>1</sup> Выражаю искреннюю благодарность моему руководителю — доценту Юлии Михайловне Спивак

Измерения методом спектроскопии импеданса слоев пористого кремния проводили как в воздушной среде так в присутствии паров изопропанола при температуре 300 °С. В работе был использован лабораторный стенд, созданный на кафедре МНЭ, СПбГЭТУ «ЛЭТИ». Порядок измерения был выбран следующий: на первом этапе измерения проводились в воздушной среде, затем повторялись в присутствии паров изопропанола, на третьем этапе повторялись измерения в воздушной среде, чтобы оценить насколько восстанавливается образец после воздействия паров спирта. Результаты на этапе 1 и 3 удов-

летворительно воспроизводились, поэтому они будут приведены ниже единожды.

Результаты спектроскопии импеданса анализировались и моделировались в программе EIS Spectrum Analyser. Результаты моделирования приведены на рисунках 1–2. Из рис. 1 видно, что сопротивление не изменяется от состава среды, зато в присутствие изопропанола у образца наблюдается ёмкостные характеристики. Из рисунка 2 видно, что пары спирта увеличивают проходимость заряда через образец.

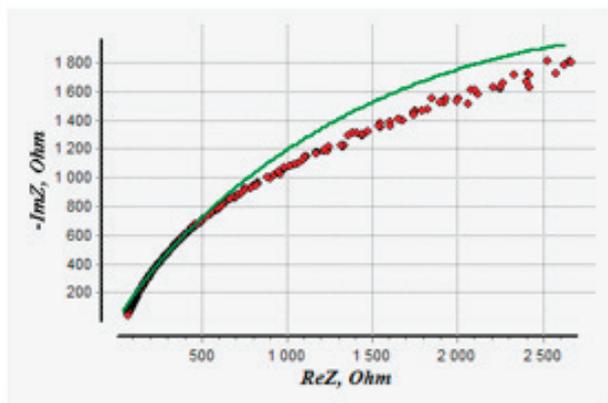


Рис. 1. Моделирование слоя пористого кремния типа 1: а — в присутствии паров изопропанола

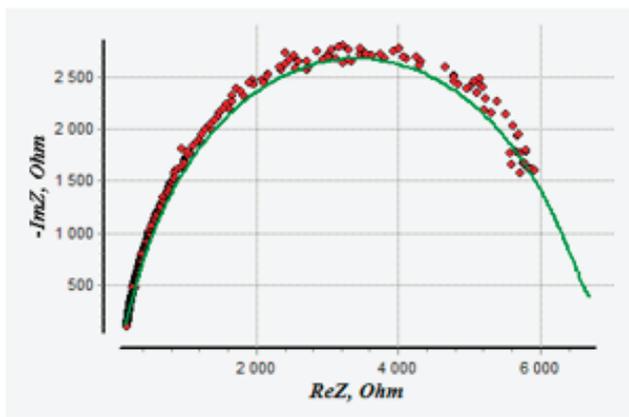


Рис. 1. Моделирование слоя пористого кремния типа 1: б — воздушной среде

Таблица 2. Параметры моделей образца 1

Среда, проведения эксперимента	R1	C1	CPE1		CPE2	
			n	P	n	P
Пары изопропанола	6646.9	0.0005	1	0.0005		
Воздушная среда	6088.6		0.17161	0.0005	0.8957	1.8561E-08

Расчет CPE осуществляется по формуле (1)

$$Z_{CPE} = P^{-1}(j\omega)^{-n} \quad (1)$$

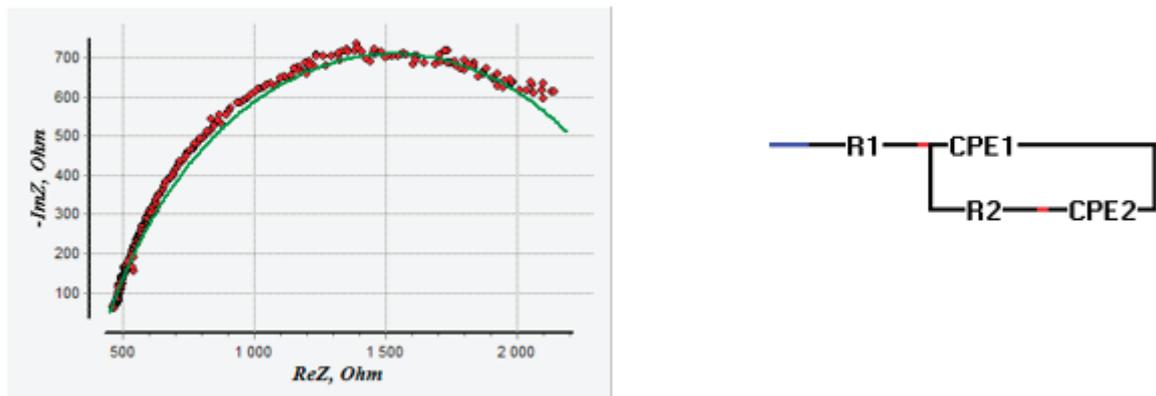


Рис. 2. моделирование образца КДБ 12: а — в присутствии паров изопропанола

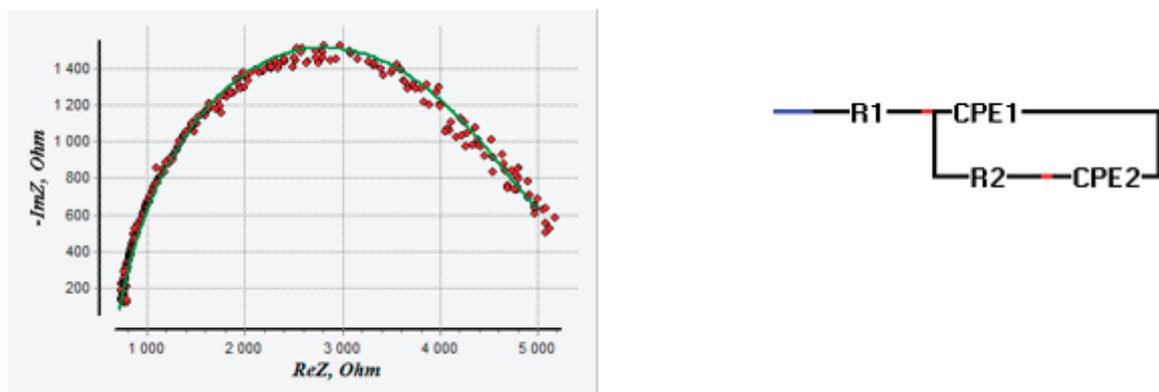


Рис. 2. моделирование образца КДБ 12: б — в воздушной среде

Параметры моделей для КДБ 12.

Таблица 3. Параметры моделей образца 2

Среда, проведения эксперимента	R1	R2	CPE1		CPE2	
			n	P	n	P
Пары изопропанола	447.74	3.6288E-09	0.81913	1.0522E-07	0.090508	0.00022912
Воздушная среда	694.39	5.467E-10	0.83233	6.6793E-08	0.047608	0.00016269

Таким образом, в результате работы были получены слои пористого кремния р-типа электропроводности с разной кристаллографической ориентацией (серия 1 — (100), серия 2 — (111)). Проведены исследования таких слоев методом спектроскопии импеданса на воздухе и в присутствии паров изопропанола. Результаты измерений показали следующие: среда измерений влияет на образец. На такие параметры как сопротивление или образец начнет проявлять емкостные параметры.

Магистерская диссертация выполняется в соответствии с плановыми работами по госзаданию Минобрнауки РФ № 16.2112.2014/К (проектная часть) по теме «Получение и исследование пористых систем, функционализированных наноматериалами, применений в фотонике, сенсорике и медицине».

Выражаю искреннюю благодарность моему руководителю — доценту Юлии Михайловне Спивак.

Литература:

1. Максимов, А. И. и др. Фазовые диаграммы состояния полупроводниковых систем // Учебное пособие Санкт-Петербурга, СПбГЭТУ, 2009.

2. Мошников, В. А., Спивак Ю. М. Атомно-силовая микроскопия для нанотехнологии и диагностики // Учебное пособие Санкт-Петербургский гос. электротехнический ун-т «ЛЭТИ». Санкт-Петербург, 2009.
3. Мошников, В. А. и др. Атомно-силовая микроскопия для исследования наноструктурированных материалов и приборных структур // Учебное пособие Санкт-Петербург, СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014.
4. Максимов, А. И. и др. Основы золь-гель-технологии нанокompозитов // Монография Санкт-Петербург, СПбГЭТУ, 2007.
5. Давыдов, С. Ю. и др. Адсорбционные явления в поликристаллических полупроводниковых сенсорах // учебное пособие / Санкт-Петербург, СПбГЭТУ, 1998.
6. Canham, L. — Microporous Silicon // Handbook of Porous Silicon — Springer 2014, pp. 1–7 / DOI 10.1007/978-3-319-04508-5\_12-1.
7. Мамыкин, А. И., и др. Исследование структуры поверхности пористого кремния методом ядерного магнитного резонанса // Физика и техника полупроводников. 1995. Т. 29. № 10. с. 1874–1877.
8. Мамыкин, А. И. и др. Магнитно-резонансная спектроскопия пористых квантово-размерных структур. // Физика и техника полупроводников. 1998. Т. 32. № 3. с. 356–358.
9. Мошников, В. А., Спивак Ю. М. «Электрохимические методы получения пористых материалов для топливных элементов» // Глава в монографии: Основы водородной энергетики / Под ред. В. А. Мошникова и Е. И. Терукова. 2-е изд. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011. 288 с.
10. Зимин, С. П. Пористый кремний — материал с новыми свойствами // Соросовский образовательный журнал. 2004. Т. 8. № 1. с. 101.
11. Травкин, П. Г., Соколова Е. Н. и др. Электрохимическая ячейка для получения пористых анодных оксидов металлов и полупроводников // патент на полезную модель RUS 12238501.06.2012.
12. Белорус, А. О. и др. Исследование фотолюминесценции пористого кремния, полученного методом фотоэлектрохимического травления / Альтернативная энергетика и экология. 2015. № 23 (187). С. 126–132.
13. Barillaro, G. Porous Silicon Gas Sensing // Handbook of Porous Silicon — Springe 2014, pp. 845–856 DOI 10.1007/978-3-319-05744-6\_86.
14. Baker C, Gole JL Interface Modifications of Porous Silicon for Chemical Sensor Applications. //JSM Nanotechnol Nanomed 2014, 2 (1): 1021.
15. Moshnikov, V.A. et. al Porous silicon with embedded metal oxides for gas sensing applications.//Journal of Non-Crystalline Solids. 2012. Т. 358. № 3. с. 590–595. doi:10.1016/j.jnoncrysol.2011.10.017.
16. Lenshin A et.al Investigations of nanoreactors on the basis of p-type porous silicon: electron structure and phase composition.//Materials Chemistry and Physics. 2012. Т. 135. № 2–3. с. 293–297. DOI 10/1016/j.matchemphys.2012.03.09
17. Спивак, Ю. М., Нигмадзянова Н. Р. Получение пористого кремния для применения в адресной доставке лекарств // Молодой ученый. 2014. № 10 (69). с. 208–212.
18. Белорус, А. О. Применение пористого кремния в биомедицине. //Молодой ученый. 2013. № 8. с. 69–74.
19. Spivak Yu. M. et. al PREPARATION AND INVESTIGATION OF POROUS SILICON NANOPARTICLES FOR TARGETED DRUG DELIVERY // Smart Nanocomposites. 2013. Т. 4. № 1. с. 115–118.
20. Мошников, В. А., Спивак Ю. М., Леньшин А. С. Исследование, технология и использование нано-пористых носителей лекарств в медицине» // Гл. 4 в кн. Пористый кремний и его применение в биомедицине Под ред. Акад. Шевченко В. Я. и акад. Киселева О. И. СПб. Химиздат, 2015, с. 70–117.

## Учебные компьютерные модели волновых процессов и явлений

Данилов Олег Евгеньевич, кандидат педагогических наук, доцент  
Глазовский государственный педагогический институт имени В. Г. Короленко

*Предложена методика использования компьютерных моделей в учебных исследованиях волновых процессов и явлений. Указано на аналогии, присутствующие в научном и учебном исследовании. Кратко представлен перечень волновых процессов и явлений, которые можно изучать согласно методике, предлагаемой автором статьи.*

**Ключевые слова:** абстрагирование, учебные компьютерные модели, волновые явления, волновые процессы, волны, цуг, обучение физике, наблюдение, сравнение, измерение, эксперимент, информационные технологии, общенаучные методы исследования, теоретические методы, эмпирические методы, вычислительный эксперимент

Проблема организации учебного процесса с использованием современных информационных технологий является актуальной в системе образования [4, с. 4]. Внедрение информационных технологий в научные исследования приводит к превращению этих исследований в развитую форму рациональной деятельности, предполагающей творчество, абстрагирование и идеализацию с опорой на воображение и интуицию. К общенаучным методам исследования относят [4, с. 11]:

- наблюдение;
- сравнение;
- измерение;
- эксперимент;
- абстрагирование;
- анализ и синтез;
- индукцию и дедукцию;
- аналогию и моделирование;
- идеализацию;
- формализацию;
- аксиоматический и логический методы;

– исторический, системный, комплексный, структурный и функциональный подходы.

По функциям методы можно разделить на эмпирические и теоретические. Для эмпирических характерны установление и накопление новых фактов, анализ, синтез, обобщение для выявления практических закономерностей. На теоретическом уровне осуществляют синтез знаний, выдвигают и формулируют теоретические закономерности. Эти два вида методов дополняют друг друга. Существуют также фундаментальные исследовательские подходы, в которых частные методы могут приобретать дополнительную специфику. К числу таких подходов относят, например, натурный и модельный.

Сейчас можно говорить о том, что появились новые формы исследований, одной из которых является вычислительный эксперимент. Причем, использование этого эксперимента стало возможным не только в научных исследованиях, но и в учебных [1; 2]. В первую очередь, это связано с тем, что автоматизированные средства вычислений (компьютеры) получили широкое распространение во всех сферах деятельности человека, в том числе и в образовании [3; с. 4–9].

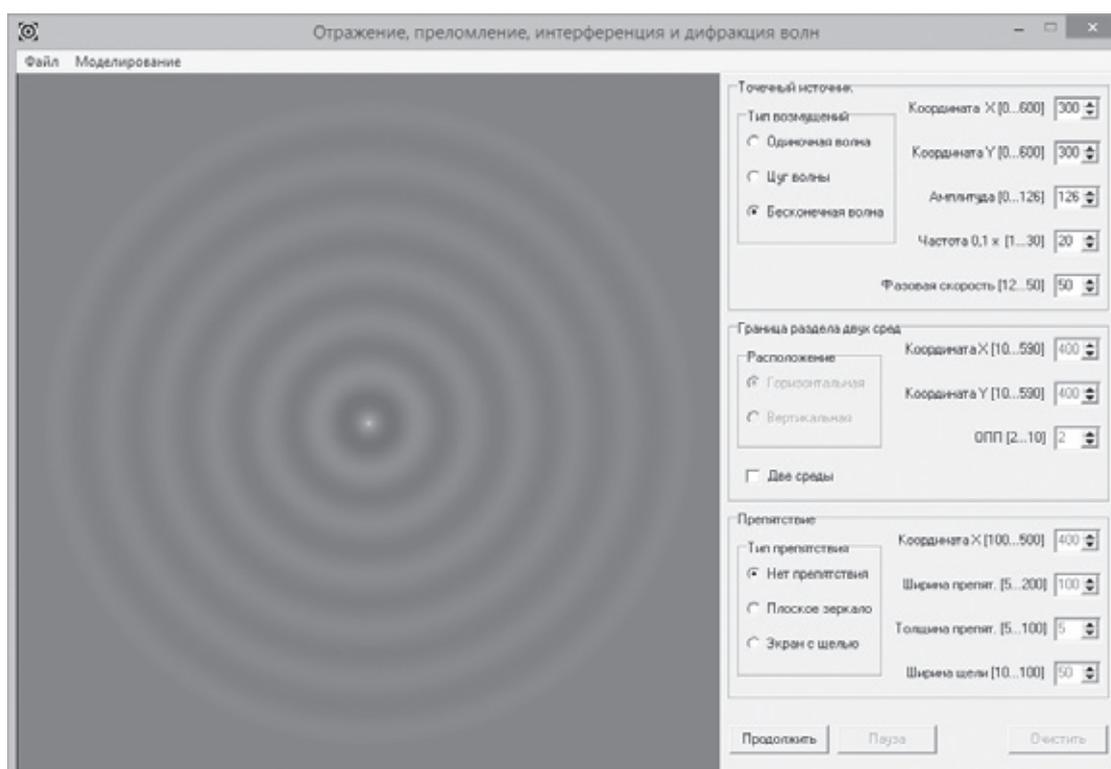


Рис. 1. Бесконечная волна

Компьютерные модели, с помощью которых может быть организовано учебное исследование, позволяют организовать его так, как это происходило бы при эмпирическом исследовании. Отличие заключается в том, что объектом исследования является не реальный объект, а его математическая модель, параметры которой рассчитываются с помощью специального алгоритма, реализуемого компьютером. При этом для такого исследования также

могут быть характерны наблюдение, сравнение, измерение, эксперимент.

На рис. 1 показано окно приложения, разработанного нами для учебных исследований волновых процессов и явлений. Приложение реализует учебную компьютерную модель, позволяющую познакомить учащихся с идеальными представлениями о волнах. В нем предусмотрено моделирование одиночной волны, цуга волны и бес-

конечной волны. Пользователь программы может изменять положение точечного источника волны, амплитуду колебаний источника, частоту этих колебаний, фазовую скорость распространения волны. Кроме того, возможно

создание неоднородностей в среде, где распространяется волна, в виде непрерывных участков (имеющих некоторый показатель преломления относительно этой среды) и непроходимых для волны препятствий.

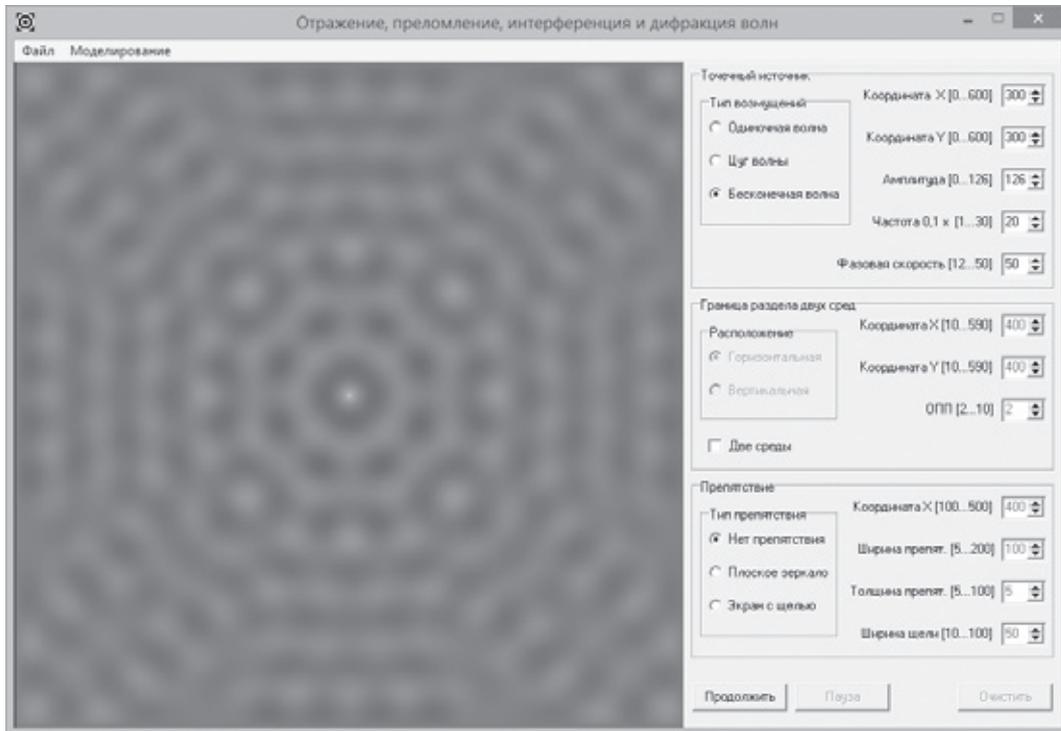


Рис. 2. Распространение бесконечной волны в замкнутом пространстве

При работе с моделью под наблюдением будет пониматься планомерное, систематическое и целенаправленное восприятие обучающимися визуализированной модели волнового процесса в целом и отдельных ее сторон. Под сравнением — установление сходства и различия моделей волновых процессов путем их сопоставления непосредственно и опосредованно. Измерения будут подразумевать определение численных значений некоторых величин, характеризующих моделируемый волновой процесс. Кроме численной оценки может осуществляться и проверка достоверности измерений. Эксперимент в нашем случае — это изучение моделей волновых процессов, основанное на активном, целенаправленном воздействии на модель обучающихся путем создания специальных условий, необходимых для проявления тех или иных свойств модели.

Рассмотрим тематику некоторых учебных исследований, которые могут провести учащиеся с компьютерной программой, моделирующей волны.

**Распространение волн.** На рис. 1 показана картина, соответствующая ситуации, когда в центре визуализирующей части окна приложения расположен точечный источник гармонической волны. Обучающиеся видят, что такие волны обладают пространственным периодом, который называется длиной волны. Программа позволяет изменять этот параметр моделируемых волн, что спо-

собствует созданию в сознании учащихся наглядно-чувственных образов волновых процессов. Кроме того, возможно изменение скорости распространения волны. Еще очень важным преимуществом программы является то, что она предоставляет возможность ограничить область распространения волны. Например, на рис. 2 показана ситуация, когда волна от источника, находящегося в центре видимой наблюдателем области, отражается от ее границ. В результате получается такая необычная для зрительного восприятия картина, которая, безусловно, вызовет интерес у обучающихся.

На рис. 3 и 4 источник, расположенный в том же месте, что и в предыдущем случае, испускает одиночную волну и цуг волны соответственно. Под одиночной волной здесь подразумевается короткое одиночное возмущение (солитон). Понятие цуга связано с волновым пакетом. Волновой пакет — это последовательность возмущений, ограниченных во времени, с перерывами между ними. Одно такое непрерывное возмущение и называют цугом волны.

**Преломление волн.** Важным моментом при изучении волновых процессов является рассмотрение преломления волн на границе раздела двух сред. На рис. 5 представлена такая ситуация, когда происходит переход волны из среды с одним показателем преломления в среду с другим показателем преломления. Видно, что этот процесс сопро-

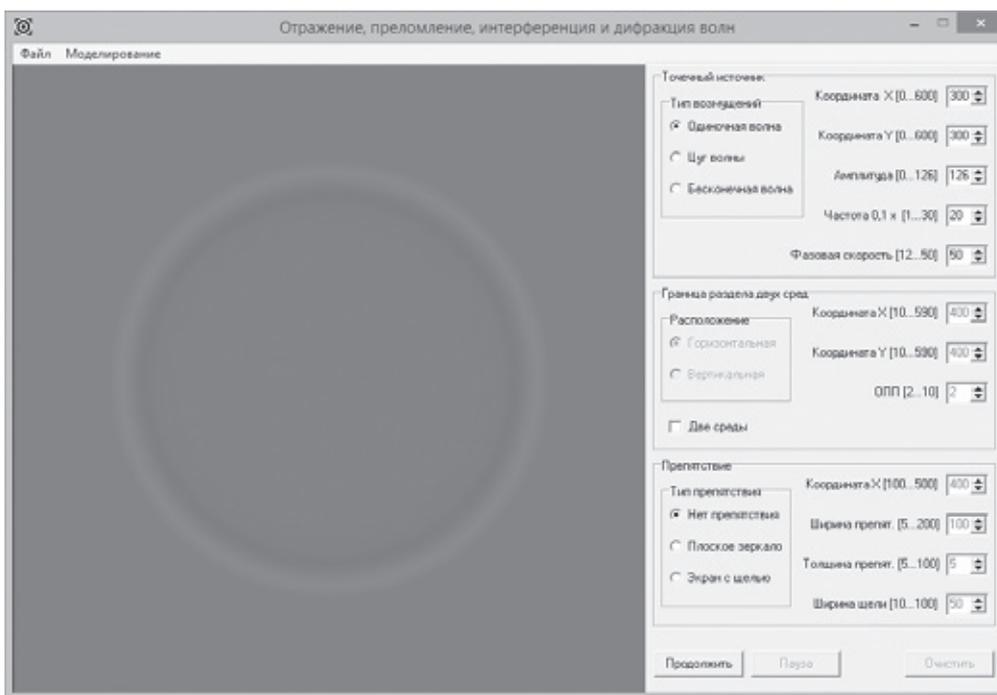


Рис. 3. Одиночная волна

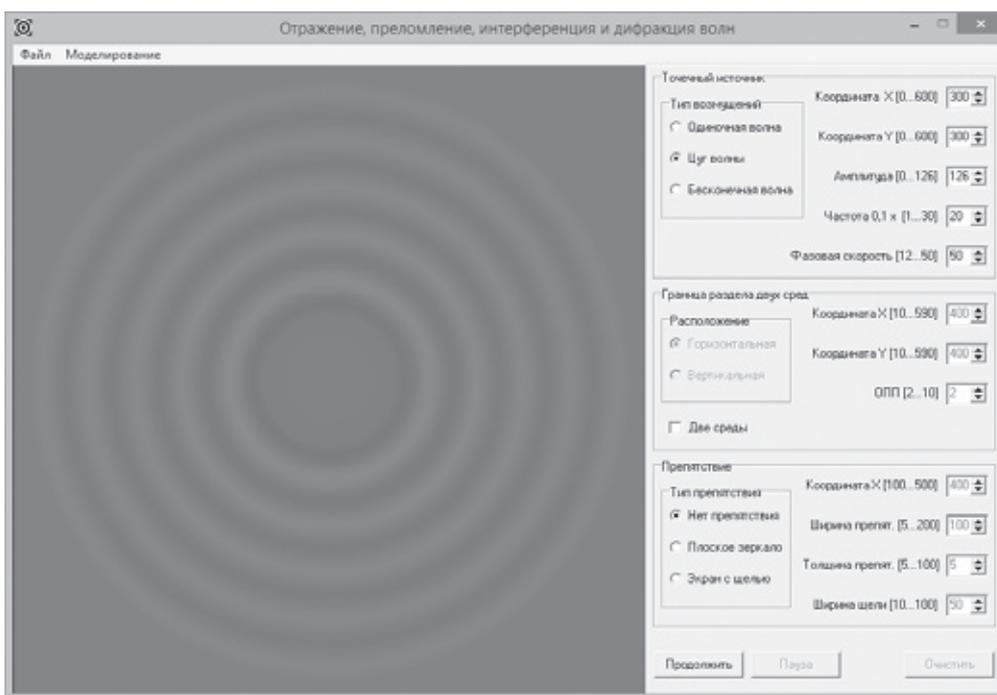


Рис. 4. Цуг волны

вождается еще и отражением волны от границы раздела сред. В программе отсутствует представление, которое можно встретить в рамках лучевого описания волновых процессов, однако учащиеся могут сами попытаться обнаружить описываемые в этой теории закономерности.

*Отражение волн.* Результат отражения волн можно наблюдать на рис. 2 и рис. 5–10. Исходя из анализа такого наблюдения, можно говорить о том, что отражение — это переизлучение волн препятствиями с изменением на-

правления распространения вплоть до смены на противоположное. Наблюдатель также имеет возможность убедиться в том, что между источником волны и отражающей поверхностью возникает стоячая волна — результат наложения падающей на отражающую поверхность и отраженной от нее волн.

*Огибание волнами препятствий.* Это явление можно увидеть, например, на рис. 6 и 7. На них видно, что волна попадает в область так называемой геометрической тени.

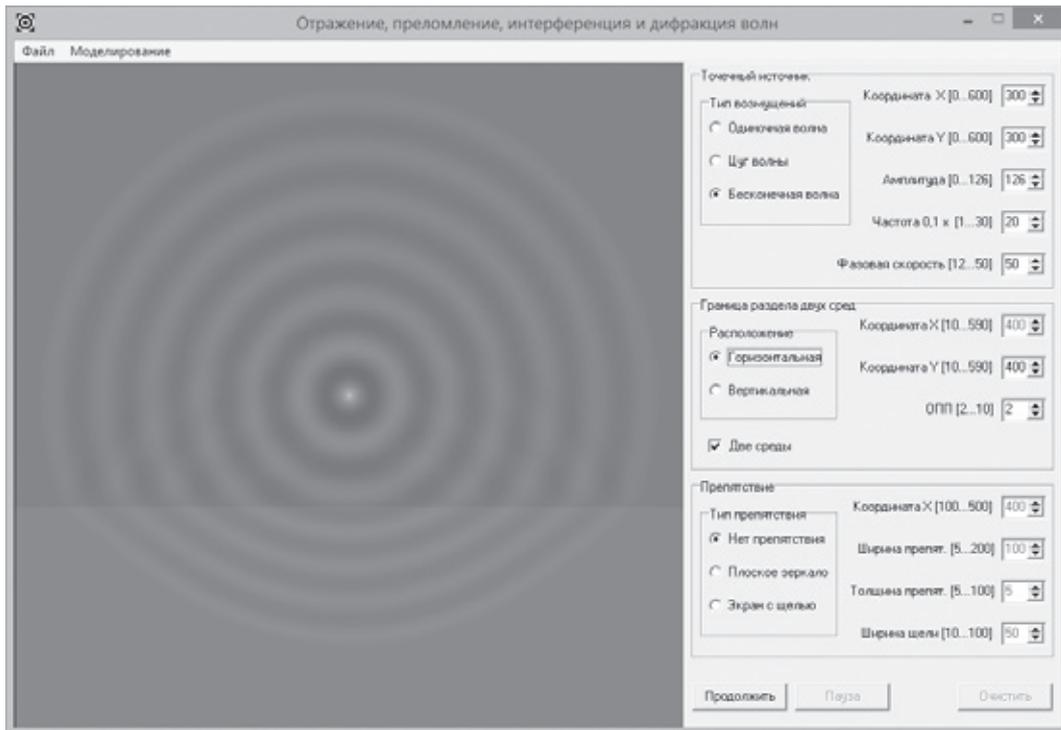


Рис. 5. Волновые явления на границе раздела двух сред

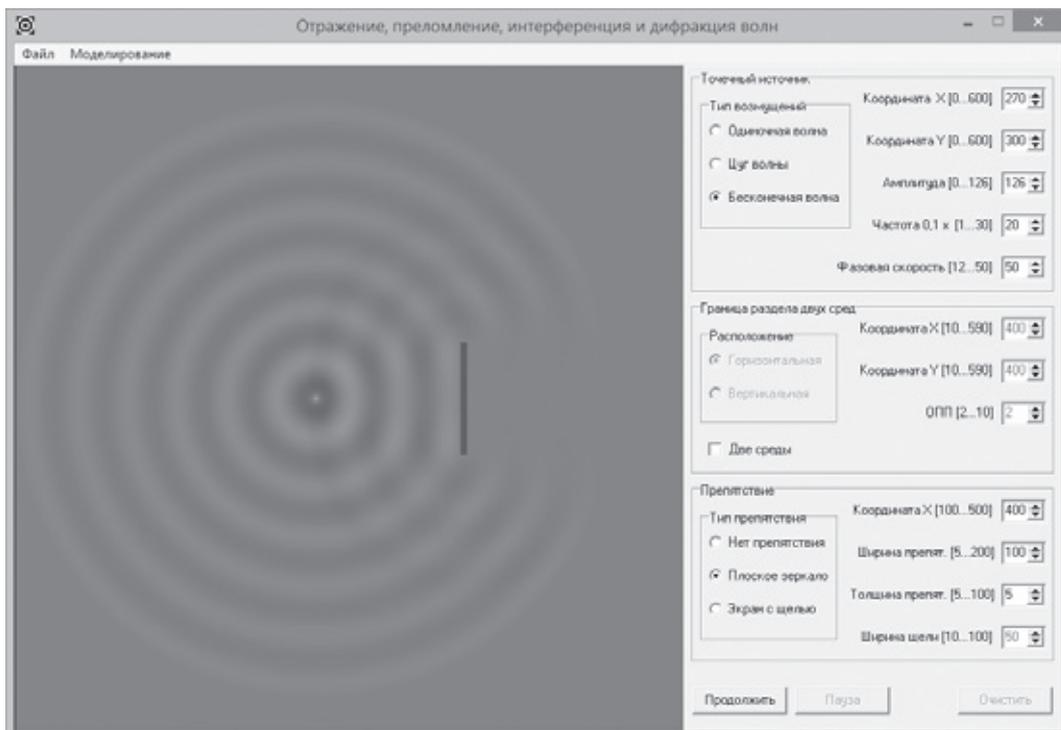


Рис. 6. Отражение волны от препятствия и огибание его волной

*Интерференция волн.* О явлении интерференции уже упоминалось, когда рассматривалось образование стоячей волны при отражении распространяющейся от источника волны от некоторой поверхности. В этом случае, можно считать, что интерферируют две волны: одна от источника, а другая — от его изображения в «зеркале», которое находится за поверхностью на таком же рассто-

янии, на каком расположен источник от этой поверхности. Возможно также получение когерентных источников волн и другим способом, например, размещением перед источником экрана с двумя щелями. В этом случае пользователь также может наблюдать интерференционную картину.

*Дифракция волн.* Дифракция волны на щели показана на рис. 8, 9 и 10. Видно, как изменяется картина

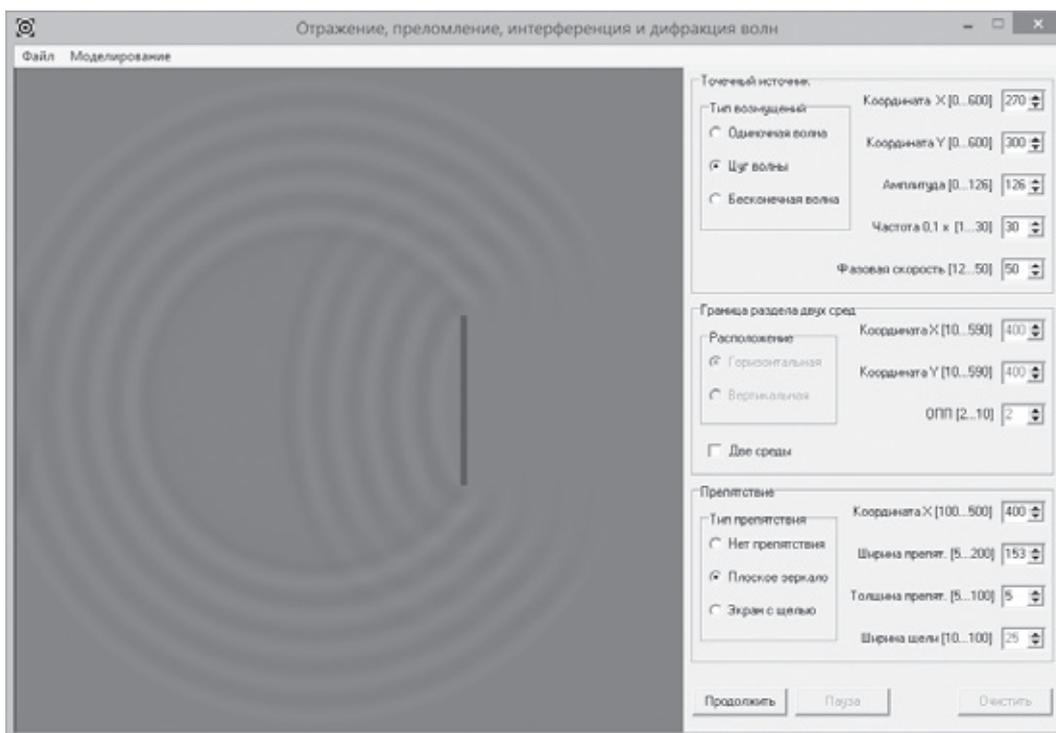


Рис. 7. Отражение цуга волны от препятствия и огибание его цугом

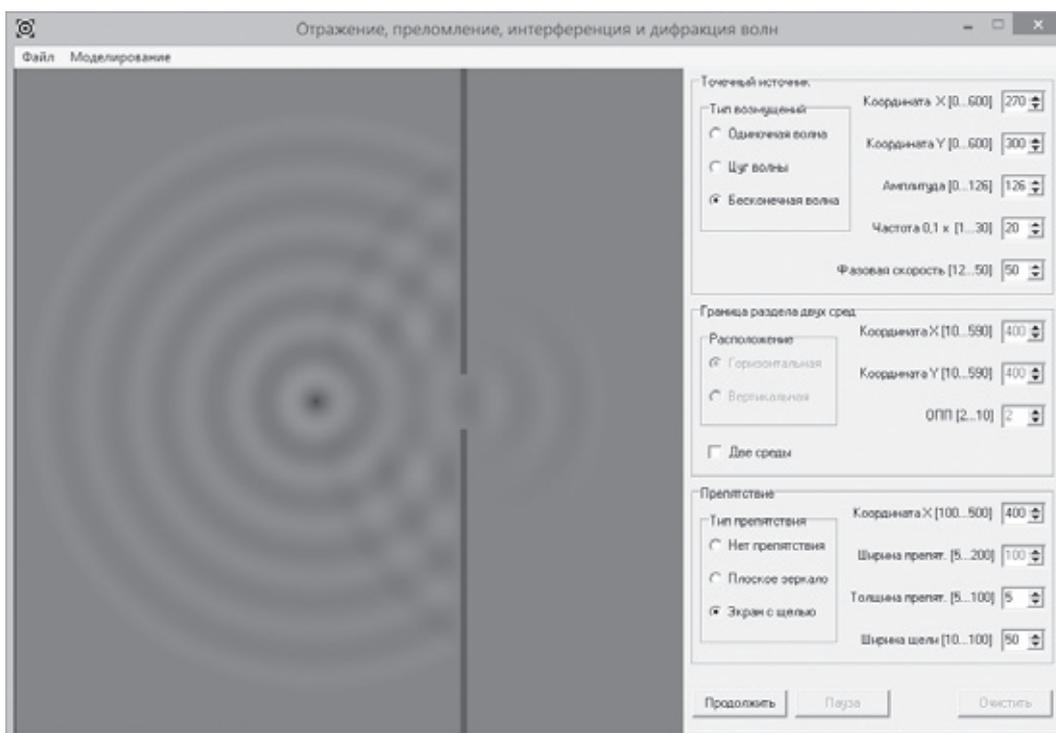


Рис. 8. Прохождение волны сквозь щель

при изменении ширины щели (рис. 8 и 9) и длины волны (рис. 9 и 10). Изначально явление дифракции рассматривалось как огибание волнами препятствий, то есть проникновение волн в область геометрической тени. С точки зрения современной физической науки определение дифракции как огибания волнами препятствия признается недостаточным (слишком узким) и не вполне

адекватным. С дифракцией связывают весьма широкий круг явлений, возникающих при распространении волн. Дифракция волн может проявляться в преобразовании структуры волн, которое может рассматриваться как огибание волнами препятствий, так и как расширение волновых пучков и их отклонение в определенном направлении.

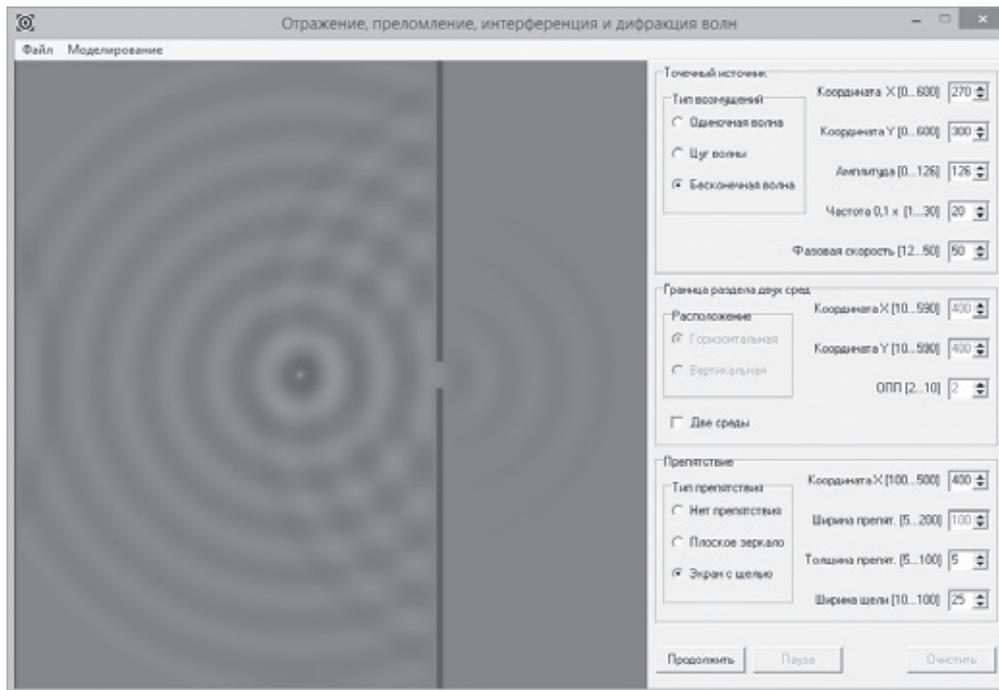


Рис. 9. Уменьшение ширины щели

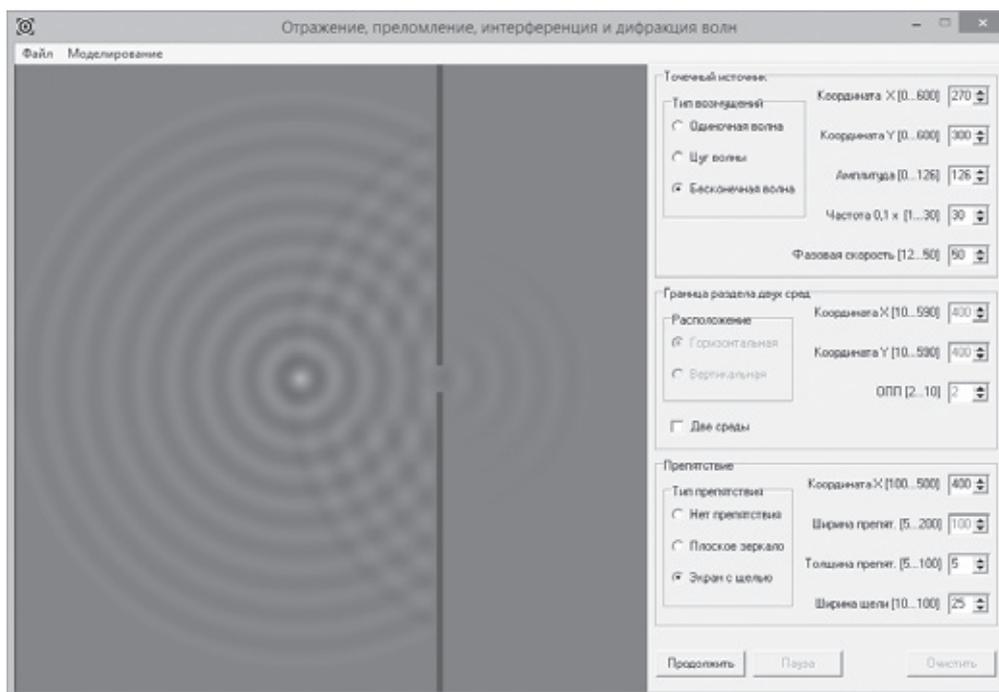


Рис. 10. Изменение длины волны

Наглядность, реализуемая с помощью компьютерных программ, одна из которых представлена в этой статье, может рассматриваться как образное восприятие явлений и процессов с помощью моделей, которые созда-

ются на основе живого созерцания [3, с. 46]. Такой вид наглядности в нашем случае связан с формированием (моделированием) наглядных образов волновых процессов.

Литература:

1. Данилов, О.Е. Компьютерная визуализация полей физических величин в учебном процессе / О.Е. Данилов // Дистанционное и виртуальное обучение. — 2015. — № 6. — с. 97–106.

2. Данилов, О. Е. Экспериментальное изучение интерференции звука на плоском зеркале с помощью компьютерного сканирования / О. Е. Данилов // Инновации в образовании. — 2016. — № 1. — с. 106–114.
3. Смирнов, А. В. Методика применения информационных технологий в обучении физике: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / А. В. Смирнов. — М.: Издательский центр «Академия», 2008. — 240 с.
4. Федотова, Е. Л. Информационные технологии в науке и образовании: учебное пособие / Е. Л. Федотова, А. А. Федотов. — М.: ИД «ФОРУМ», ИНФРА-М, 2015. — 336 с.

## Математическое моделирование САР скорости асинхронного двигателя с переменными $\Psi_R — I_S$ в системе абсолютных единиц

Емельянов Александр Александрович, доцент;  
 Бесклеткин Виктор Викторович, ассистент;  
 Прокопьев Константин Васильевич, студент;  
 Ситенков Александр Александрович, студент;  
 Бурхацкий Владимир Владимирович, студент;  
 Мальцев Никита Васильевич, студент;  
 Авдеев Александр Сергеевич, студент;  
 Габзалилов Эльвир Фиргатович, студент

Российский государственный профессионально-педагогический университет

Эта работа необходима для методических указаний к выполнению студентами лабораторных и практических работ по дисциплине «Системы управления электроприводов» в разделе «Векторное управление асинхронными двигателями». Эта статья является продолжением работы [1]. Основным отличием этой работы является то, что математическая модель двигателя дана в системе абсолютных единиц, а регулирующая часть в относительных единицах. Для согласования этих частей используются соответствующие преобразователи.

Развернутая схема САР скорости асинхронного двигателя дана на рис. 2. Задание на скорость  $\omega^*$  формируется в Signal Builder (рис. 1).

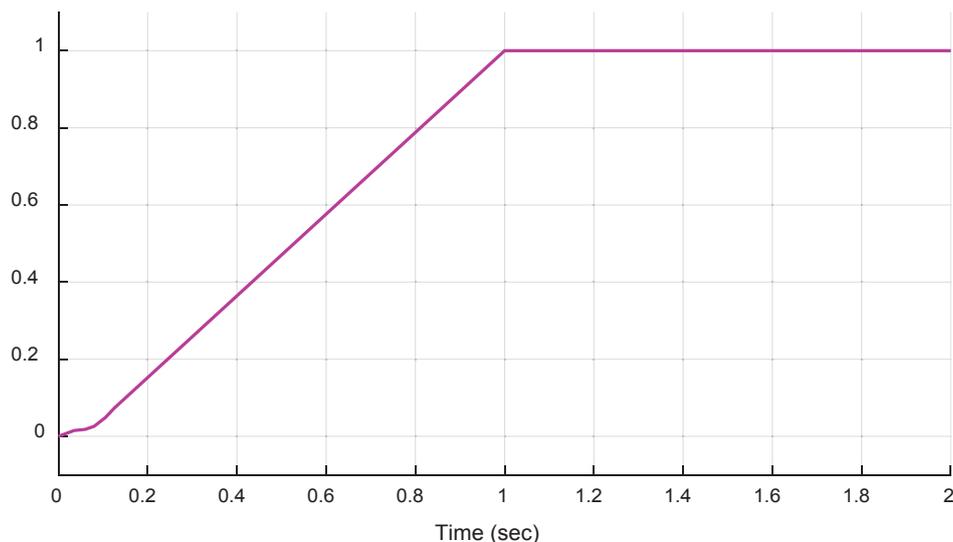


Рис. 1. Задание на скорость  $\omega^*$

Под каждым элементом развернутой схемы САР скорости указаны его номер и название. С целью уменьшения объема статьи произведем группировку некоторых элементов.

Математические модели регулятора скорости (номер 1), задания на проекции статорного тока по осям  $x$  (номер 2) и  $y$  (номер 3) даны на рис. 3, 4, 5 [1], [4].

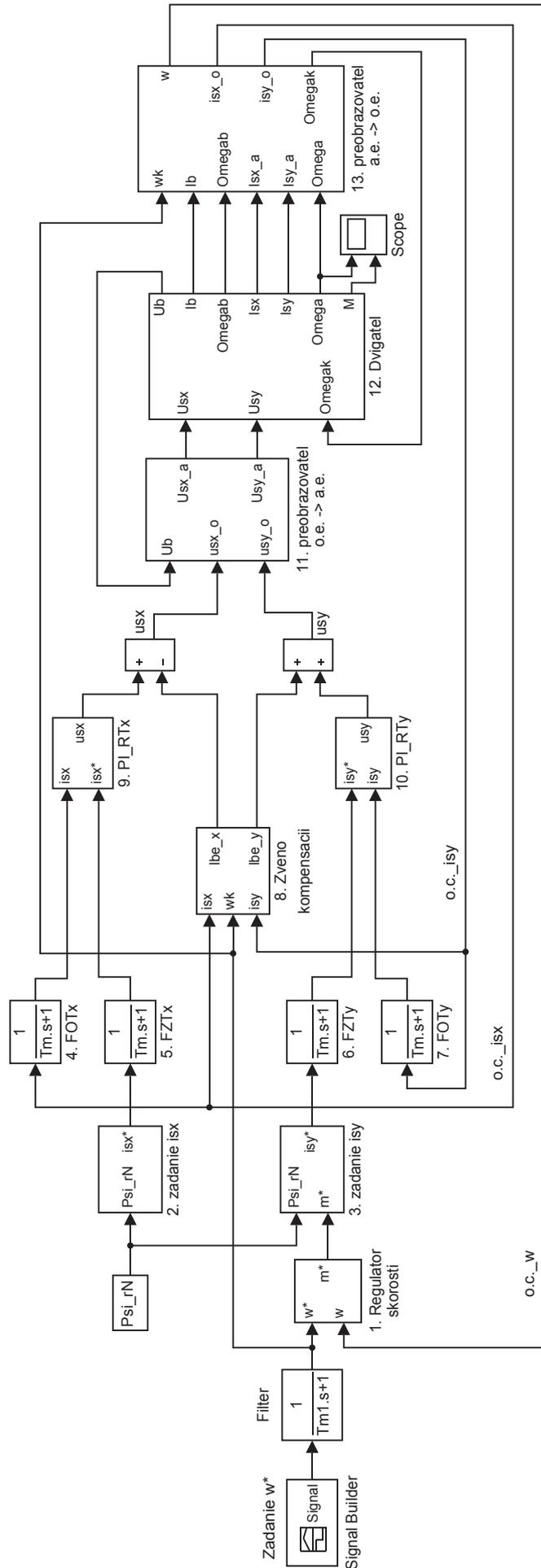


Рис. 2. Развернутая математическая модель САР скорости асинхронного двигателя

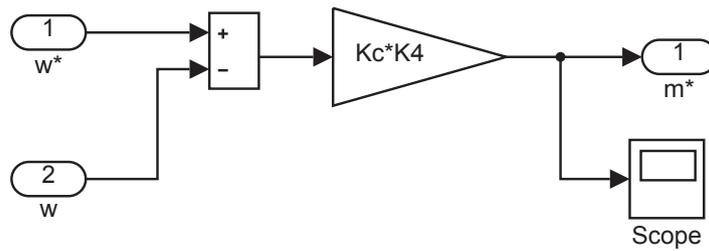


Рис. 3. Регулятор скорости

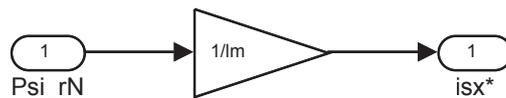


Рис. 4. Задание  $i_{sx}^*$

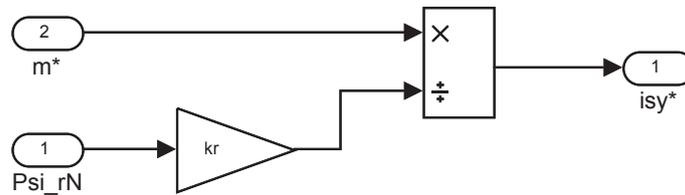


Рис. 5. Задание  $i_{sy}^*$

Фильтры под номерами 4, 5, 6, 7 имеют одинаковые передаточные функции с постоянной времени  $T_{\mu} = 0.005$  с. Звено компенсации внутренних перекрестных связей (номер 8) [4] дано на рис. 6. Регуляторы тока по проекциям  $x$  и  $y$  под номерами 9 и 10 даны на рис. 7 и 8 [1], [4].

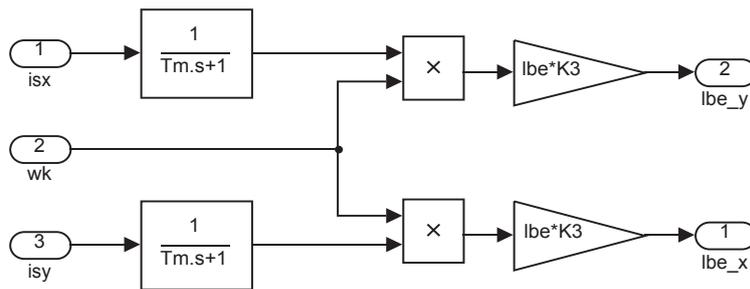


Рис. 6. Звено компенсации внутренних перекрестных связей

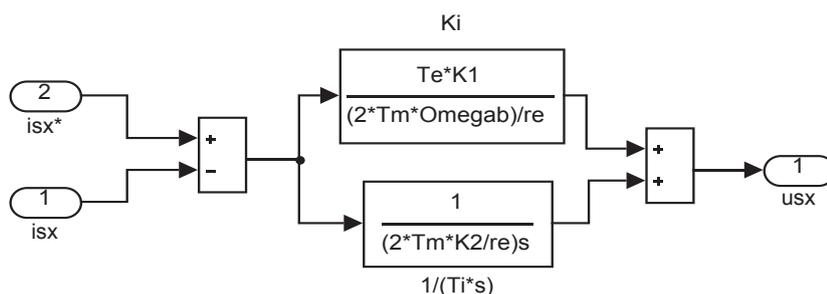


Рис. 7. Регулятор статорного тока по проекции  $x$ : ПИ-РТх

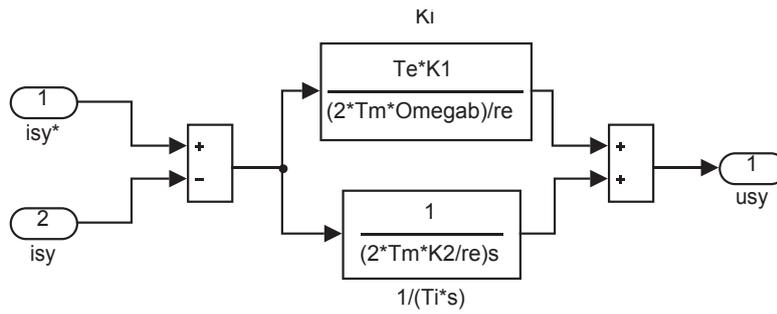


Рис. 8. Регулятор тока по проекции у: ПИ-РТу

Преобразователи параметров из системы относительных единиц в абсолютные (номер 11) и, наоборот, из абсолютных в относительные (номер 13) приведены на рис. 9 и 10.

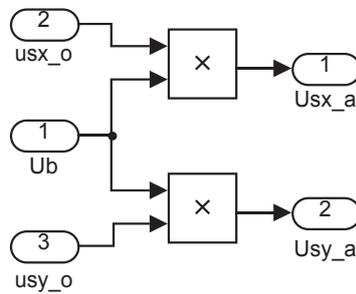


Рис. 9. Преобразователь параметров из системы относительных единиц в абсолютные

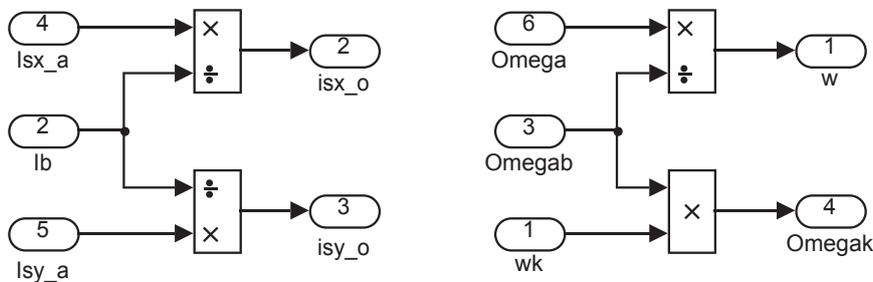


Рис. 10. Преобразователь параметров из системы абсолютных единиц в относительные

Математическая модель асинхронного двигателя (номер 12) дана на рис. 11, 12, 13 и 14.

В работе [3] в главе 6 «Примеры» дан образец расчета параметров асинхронного двигателя. В наших дальнейших работах направленных на подготовку студентов к исследовательской работе, глава 6 окажет неоценимую помощь. Можно было бы по аналогии рассмотреть паспортные данные любого другого двигателя, но для проверки правильности выводов уравнений сделанных исследовательской группой самостоятельно, необходимо постоянно выходить на многие полученные результаты в работе [4]. Поэтому, этот пример расчета окажется очень полезным.

Номинальные данные:

Номинальный режим работы

Номинальная мощность

Номинальное фазное напряжение

Номинальный фазный ток

Номинальная частота

Номинальная синхронная скорость

Номинальная скорость ротора

Номинальный КПД

S1;

$P_N = 320 \text{ кВт}$ ;

$U_{s,N} = 380 \text{ В}$ ;

$I_{s,N} = 324 \text{ А}$ ;

$f_N = 50 \text{ Гц}$ ;

$\Omega_{0,N} = 104,7 \text{ рад/с}$ ;

$\Omega_N = 102,83 \text{ рад/с}$ ;

$\eta_N = 0,944$ ;

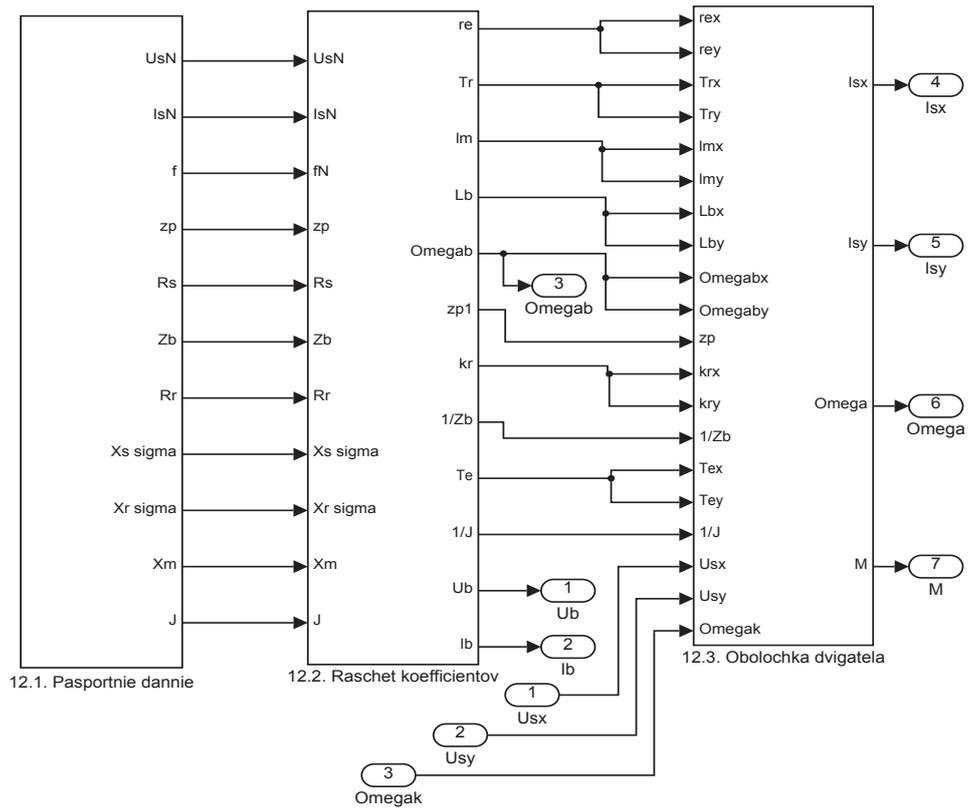


Рис. 11. Математическая модель асинхронного двигателя с переменными  $\Psi_R - I_s$

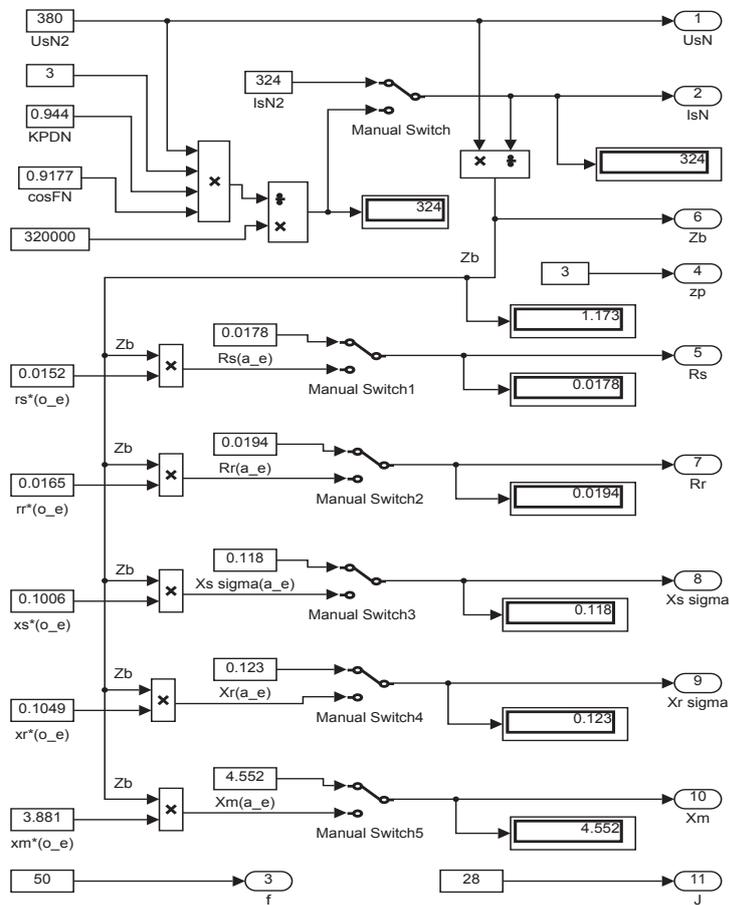


Рис. 12. Расчет коэффициентов по паспортным (справочным) данным

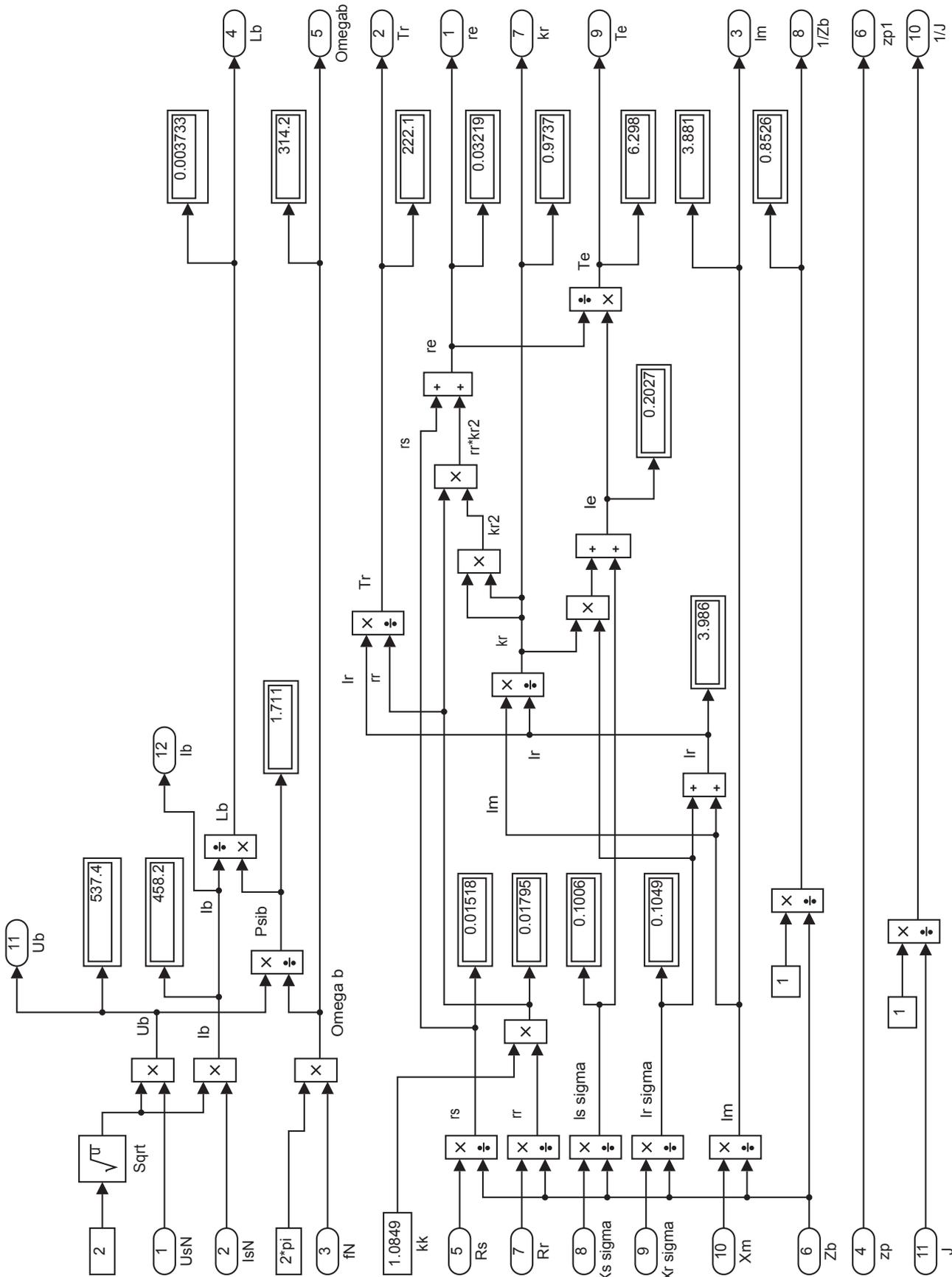


Рис. 13. Определение коэффициентов оболочки асинхронного двигателя в Simulink-Matlab

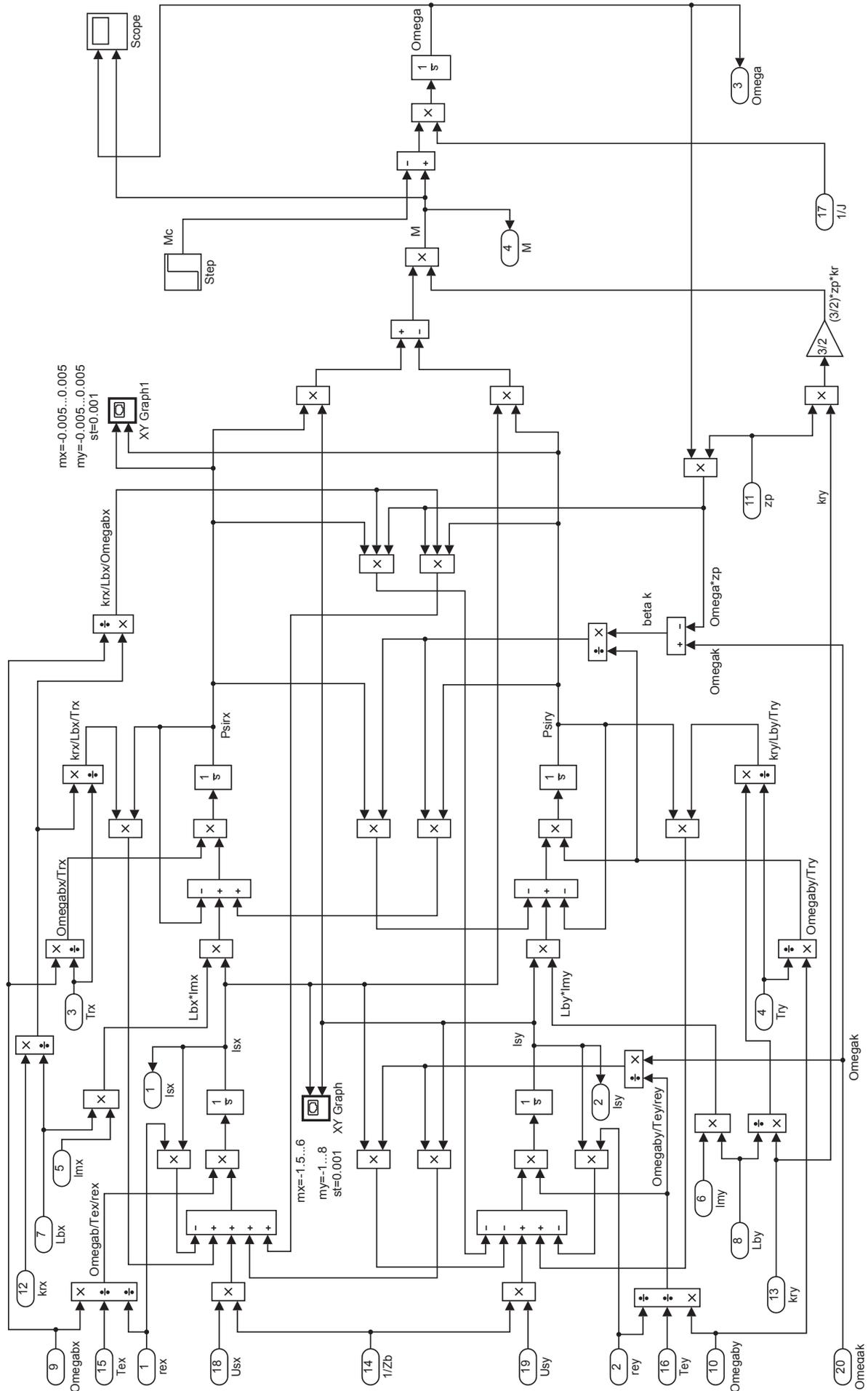


Рис. 14. Модель оболочки асинхронного двигателя с переменными  $\Psi_R$  — I<sub>s</sub> в Simulink-Matlab на основе интегрирующих звеньев

Номинальный коэффициент мощности	$\cos \varphi_N = 0,92;$
Число пар полюсов	$z_p = 3.$
<i>Параметры T-образной схемы замещения при номинальной частоте:</i>	
Активное сопротивление обмотки статора	$R_s = 0,0178 \text{ Ом};$
Индуктивное сопротивление рассеяния обмотки статора	$X_{s\sigma} = 0,118 \text{ Ом};$
Активное сопротивление обмотки ротора, приведенное к статору	$R_r = 0,0194 \text{ Ом};$
Индуктивное сопротивление рассеяния обмотки ротора, приведенное к статору	$X_{r\sigma} = 0,123 \text{ Ом};$
Главное индуктивное сопротивление	$X_m = 4,552 \text{ Ом};$
Суммарный момент инерции двигателя и механизма	$J_\Sigma = 28 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$

*Базисные величины системы относительных единиц:*

Напряжение	$U_\delta = \sqrt{2}U_{s,N} = \sqrt{2} \cdot 380 = 537,4 \text{ В};$
Ток	$I_\delta = \sqrt{2}I_{s,N} = \sqrt{2} \cdot 324 = 458,2 \text{ А};$
Частота	$\Omega_\delta = \Omega_{s,N} = 2\pi f_N = 2 \cdot \pi \cdot 50 = 314,16 \text{ рад} / \text{с};$
Скорость ротора	$\Omega_{r,\delta} = \frac{\Omega_\delta}{z_p} = \frac{314,16}{3} = 104,72 \text{ рад} / \text{с};$
Сопротивление	$Z_\delta = \frac{U_\delta}{I_\delta} = \frac{537,4}{458,2} = 1,1728 \text{ Ом};$
Потокосцепление	$\Psi_\delta = \frac{U_\delta}{\Omega_\delta} = \frac{537,4}{314,16} = 1,711 \text{ В} \cdot \text{с};$
Индуктивность	$L_\delta = \frac{\Psi_\delta}{I_\delta} = \frac{1,711}{458,2} = 3,733 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$

Используя номинальные данные двигателя, определяем:

$$M_\delta = k_\Delta \cdot M_N = k_\Delta \cdot \frac{P_N}{\Omega_N},$$

где  $k_\Delta > 1$  – коэффициент, учитывающий различие значений электромагнитного момента и момента на валу двигателя в номинальном режиме ( $k_\Delta = 1,0084$ ).

$$M_\delta = k_\Delta \cdot \frac{P_N}{\Omega_N} = 1,0084 \cdot \frac{320 \cdot 10^3}{102,83} = 3138,07 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

В качестве базисной мощности выбираем значение электромагнитной мощности двигателя в номинальном режиме, определяемое по следующей формуле:

$$P_\delta = M_\delta \cdot \Omega_{p,\delta} = 3138,07 \cdot 104,72 = 328,62 \cdot 10^3 \text{ Вт}.$$

Относительные значения параметров схемы замещения двигателя:

$$r_s = \frac{R_s}{Z_\delta} = \frac{0,0178}{1,1728} = 0,0152;$$

$$l_{s\sigma} = \frac{L_{s\sigma}}{L_\delta} = \frac{X_{s\sigma}}{(\Omega_\delta \cdot L_\delta)} = \frac{X_{s\sigma}}{Z_\delta} = \frac{0,118}{1,1728} = 0,1006;$$

$$r_r = \frac{R_r}{Z_\delta} = \frac{0,0194}{1,1728} = 0,0165;$$

$$l_{r\sigma} = \frac{X_{r\sigma}}{Z_\delta} = \frac{0,123}{1,1728} = 0,1049;$$

$$l_m = \frac{X_m}{Z_\delta} = \frac{4,552}{1,1728} = 3,881.$$

Механическая постоянная времени:

$$T_j = J_\Sigma \cdot \frac{\Omega_{r,\delta}}{M_\delta} = 28 \cdot \frac{104,72}{3138,07} = 0,934 \text{ с}.$$

Номинальное значение скольжения:

$$\beta_N = \frac{\Omega_{0N} - \Omega_N}{\Omega_{0N}} = \frac{104,72 - 102,83}{104,72} = 0,018.$$

Относительное значение номинальной скорости ротора:

$$\omega_N = (1 - \beta_N) = (1 - 0,018) = 0,982.$$

Нормирующий энергетический коэффициент:

$$\zeta_N = \frac{S_{s.N}}{P_{э.м.Н}} = \frac{3 \cdot U_{s.N} \cdot I_{s.N}}{P_{\phi}} = \frac{3 \cdot 380 \cdot 324}{328620} = 1,124;$$

$$S_{s.N} = 3 \cdot U_{s.N} \cdot I_{s.N} = 369360 \text{ ВА};$$

$$k_s = \frac{l_m}{l_m + l_{s\sigma}} = \frac{3,881}{3,881 + 0,1006} = 0,9749;$$

$$k_r = \frac{l_m}{l_m + l_{r\sigma}} = \frac{3,881}{3,881 + 0,1049} = 0,9737;$$

$$l_{\sigma_3} = l_{s\sigma} + l_{r\sigma} + l_{s\sigma} \cdot l_{r\sigma} \cdot l_m^{-1} = 0,1006 + 0,1049 + \frac{0,1006 \cdot 0,1049}{3,881} = 0,2082.$$

При расчете режимов работы, для того чтобы  $i_{sh} = 1$ ,  $m_N = 1$ ,  $u_{sN} = 1$ ,  $\omega_{sN} = 1$  и  $\beta_N = 0,018$ , необходимо откорректировать  $r_r$ :

$$r_{rk} = \rho_N \cdot \beta_N = 0,9962 \cdot 0,018 = 0,0179,$$

Где  $\rho_N = 0,9962$  – корректирующий коэффициент [3, с. 296].

$$kk = \frac{r_{rk}}{r_r} = 1,0849 \text{ — коэффициент, показывающий отношение } r_{rk} \text{ к } r_r.$$

$$\alpha_r = k_r \cdot \frac{r_{rk}}{l_m} = 0,9737 \cdot \frac{0,0179}{3,881} = 0,00451;$$

$$l_3 = k_r \cdot l_{r\sigma} + l_{s\sigma} = 0,9737 \cdot 0,1049 + 0,1006 = 0,20274;$$

$$l_3 = k_r \cdot l_{\sigma_3} = 0,9737 \cdot 0,2082 = 0,20274;$$

$$r_3 = r_s + k_r^2 \cdot r_{rk} = 0,0152 + 0,9737^2 \cdot 0,0179 = 0,032171;$$

$$T_3 = \frac{l_3}{r_3} = \frac{0,20274}{0,032171} = 6,302;$$

$$k_r^2 \cdot r_{rk} = 0,9737^2 \cdot 0,0179 = 0,017;$$

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{0,032171} = 31,084;$$

$$T_{r\sigma} = \frac{l_{r\sigma} + k_s \cdot l_{s\sigma}}{r_{rk}} = \frac{0,1049 + 0,9749 \cdot 0,1006}{0,0179} = 11,339;$$

$$T_{s\sigma} = \frac{l_{s\sigma} + k_s \cdot l_{r\sigma}}{r_s} = \frac{0,1006 + 0,9737 \cdot 0,1049}{0,0152} = 13,338;$$

$$\frac{T_r}{k_r^2 \cdot r_{rk}} = \frac{222,676}{0,9737^2 \cdot 0,0179} = 13098,587;$$

$$\frac{k_r}{T_{s\sigma}} = \frac{0,9737}{13,338} = 0,073;$$

$$\frac{T_{s\sigma}}{k_r} = \frac{13,338}{0,9737} = 13,698;$$

$$\frac{T_{r\sigma} \cdot T_{s\sigma}}{k_r \cdot k_s} = \frac{11,339 \cdot 13,338}{0,9737 \cdot 0,9749} = 159,324;$$

$$k_r \cdot k_s \cdot T_{s\sigma}^{-1} = \frac{k_r \cdot k_s}{T_{s\sigma}} = 0,073 \cdot 0,9749 = 0,0712;$$

$$\frac{T_{r\sigma}}{\Omega_{\phi}} = \frac{11,339}{314,16} = 0,036;$$

$$\frac{T_{s\sigma}}{\Omega_{\phi}} = \frac{13,338}{314,16} = 0,0425;$$

$$\frac{T_s}{\Omega_0} = \frac{6,302}{314,16} = 0,02006;$$

$$\frac{T_r}{\Omega_0} = \frac{222,676}{314,16} = 0,7088;$$

$$\frac{\zeta_N}{l_{\sigma_3}} = \frac{1,124}{0,2082} = 5,3987;$$

$$\zeta_N \cdot T_r = 1,124 \cdot 222,676 = 250,29;$$

$$\frac{\Omega_0}{r_s \cdot T_s} = \frac{314,16}{0,032171 \cdot 6,302} = 1549,558;$$

$$\frac{k_r}{T_r} = \frac{0,9737}{222,676} = 0,00437;$$

$$\frac{1}{r_{rk} \cdot k_r^2} = \frac{1}{0,0179 \cdot 0,9737^2} = 58,824;$$

$$\frac{r_{rk} \cdot k_r^2 \cdot \Omega_0}{T_r} = \frac{0,0179 \cdot 0,9737^2 \cdot 314,16}{222,676} = 0,024.$$

Расчет этих коэффициентов производим в Script:

```
%Номинальные данные
```

```
PN=320000;
```

```
UsN=380;
```

```
IsN=324;
```

```
fN=50;
```

```
Omega0N=104.7;
```

```
OmegaN=102.83;
```

```
nN=0.944;
```

```
cos_phiN=0.92;
```

```
zp=3;
```

```
%Параметры Т-образной схемы замещения при номинальной частоте
```

```
Rs=0.0178;
```

```
Xs=0.118;
```

```
Rr=0.0194;
```

```
Xr=0.123;
```

```
Xm=4.552;
```

```
J=28;
```

```
%Базисные величины системы относительных единиц
```

```
Ub=sqrt(2)*UsN;
```

```
Ib=sqrt(2)*IsN;
```

```
OmegasN=2*pi*fN;
```

```
Omegab=OmegasN;
```

```
Omegarb=Omegab/zp;
```

```
Zb=Ub/Ib;
```

```
Psib=Ub/Omegab;
```

```
Lb=Psib/Ib;
```

```
kd=1.0084;
```

```
Mb=kd*PN/OmegaN;
```

```
Pb=Mb*Omegarb;
```

```
rs=Rs/Zb;
```

```
ls=Xs/Zb;
```

```
lr=Xr/Zb;
```

```
lm=Xm/Zb;
```

```
Tj=J*Omegarb/Mb;
```

```
betaN=(Omega0N-OmegaN)/Omega0N;
```

```
wN=(1-betaN);
```

```
SsN=3*UsN*IsN;
```

```
zetaN=SsN/Pb;
```

```
ks=lm/(lm+ls);
```

```
kr=lm/(lm+lr);
```

```
lbe=ls+lr+ls*lr*lm^(-1);
```

```
roN=0.9962;
```

```

rr=roN*betaN;
alphar=kr*rr/lm;
le=kr*lbe;
re=rs+(kr^2)*rr;
Te=le/re;
Tr=(lm+lr)/rr;
Psi_rN=0.942;
Tm=0.005;
Tm1=0.0075;
K1=4.5;
K2=1.8;
K3=0.1;
K4=1.3;
Kc=260;

```

Результаты расчетов скорости  $\Omega$  и электромагнитного момента  $M$  приведены на рис. 15.

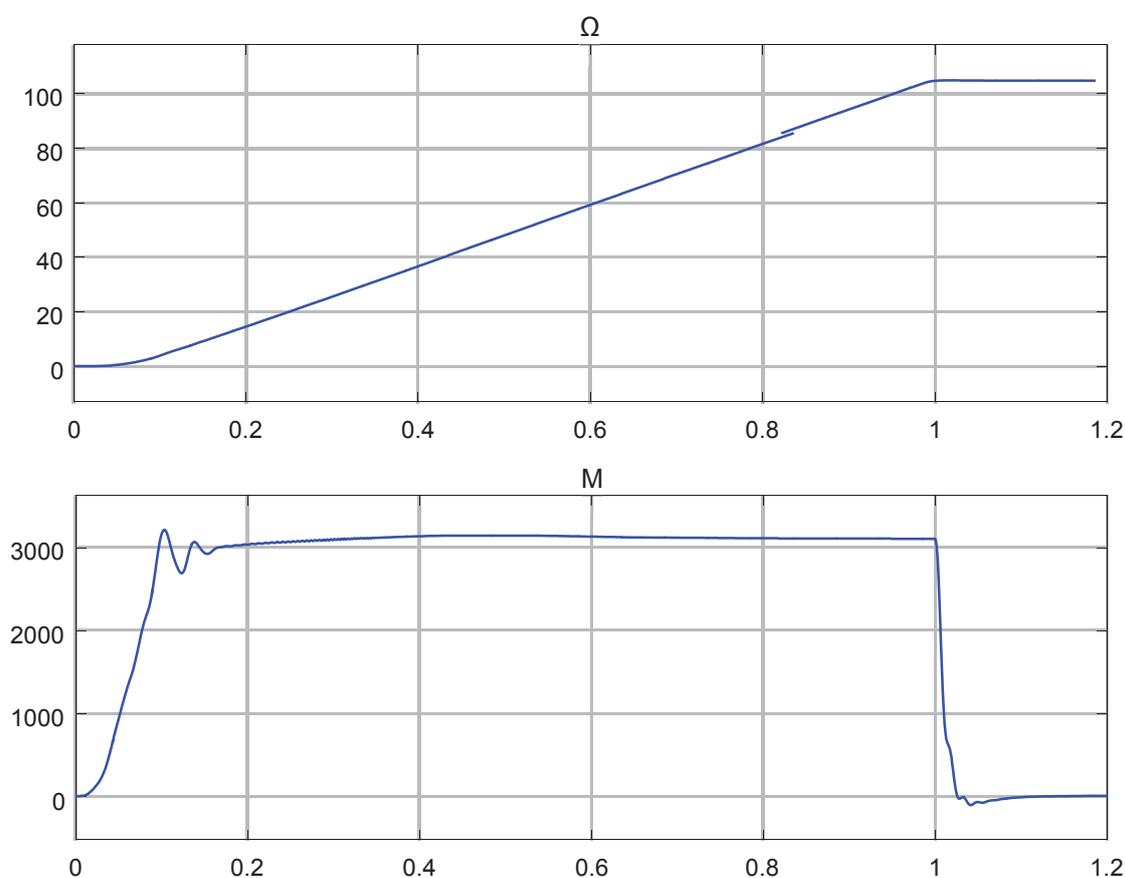


Рис. 15. Графики скорости и момента

Литература:

1. Емельянов, А.А., Бесклеткин В.В., Авдеев А.С., Чернов М.В., Киряков Г.А., Габзалилов Э.Ф. Математическое моделирование САР скорости асинхронного двигателя с переменными  $\psi_r - i_s$  // Молодой ученый. — 2015. — № 22. — с. 1–13.
2. Шрейнер, Р.Т. Системы подчиненного регулирования электроприводов: учеб. пособие / Р.Т. Шрейнер. — Екатеринбург: Изд-во ГОУ ВПО «Рос. гос. проф. — пед. ун-т», 2008. — 279 с.
3. Шрейнер, Р.Т. Электромеханические и тепловые режимы асинхронных двигателей в системах частотного управления: учеб. пособие / Р.Т. Шрейнер, А.В. Костылев, В.К. Кривовяз, С.И. Шилин. Под ред. проф. д.т. н. Р.Т. Шрейнера. — Екатеринбург: ГОУ ВПО «Рос. гос. проф. — пед. ун-т», 2008. — 361 с.

4. Шрейнер, Р.Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты. — Екатеринбург: УРО РАН, 2000. — 654 с.

### Математическое моделирование системы «АИН ШИМ — АД» с транзисторными ключами

Емельянов Александр Александрович, доцент;  
 Бесклеткин Виктор Викторович, ассистент;  
 Прокопьев Константин Васильевич, студент;  
 Ситенков Александр Александрович, студент;  
 Бурхацкий Владимир Владимирович, студент;  
 Мальцев Никита Васильевич, студент;  
 Авдеев Александр Сергеевич, студент;  
 Габзалилов Эльвир Фиргатович, студент

Российский государственный профессионально-педагогический университет

В отличие от работы [1] в системе «АИН ШИМ — АД» смоделированы идеализированные транзисторные ключи в инверторе без учета «мертвого времени» их переключения [2], [3]. На рис. 1 приведена полная схема разомкнутой системы при прямом пуске.

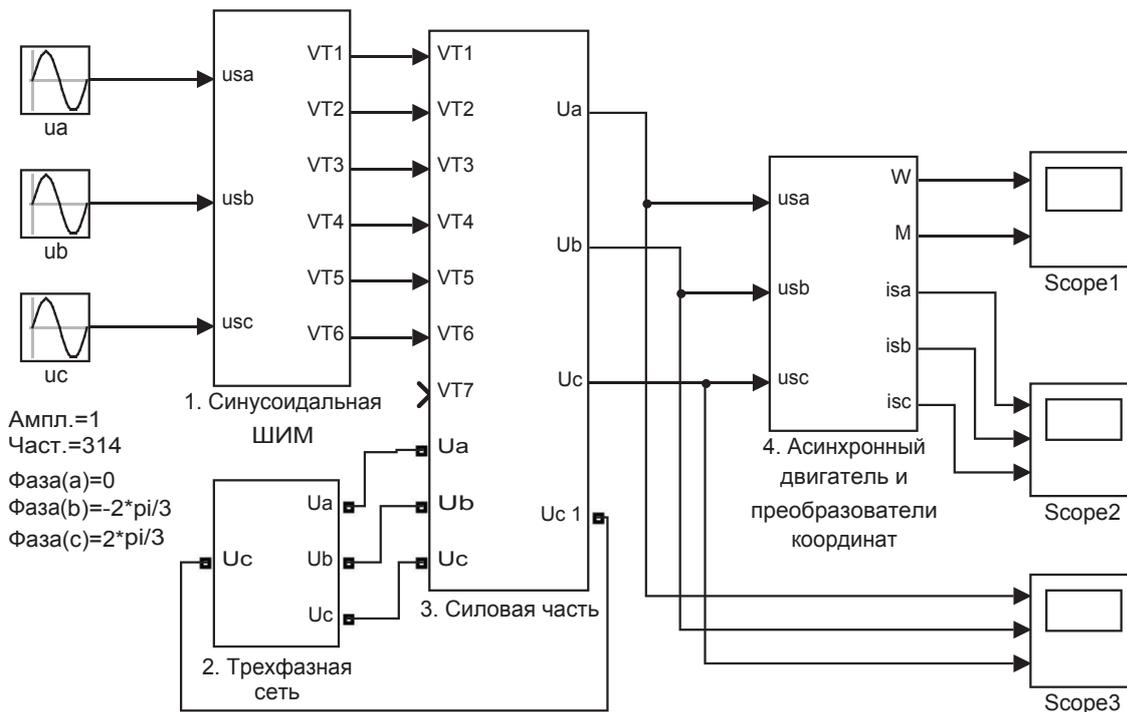


Рис. 1. Полная схема системы «АИН ШИМ — АД»

В этой схеме под каждым элементом дана нумерация, а именно:

1. Синусоидальная ШИМ (рис. 2).
2. Трёхфазная сеть (рис. 3).
3. Силовая часть (рис. 4).
4. Асинхронный двигатель и преобразователи координат (рис. 5).

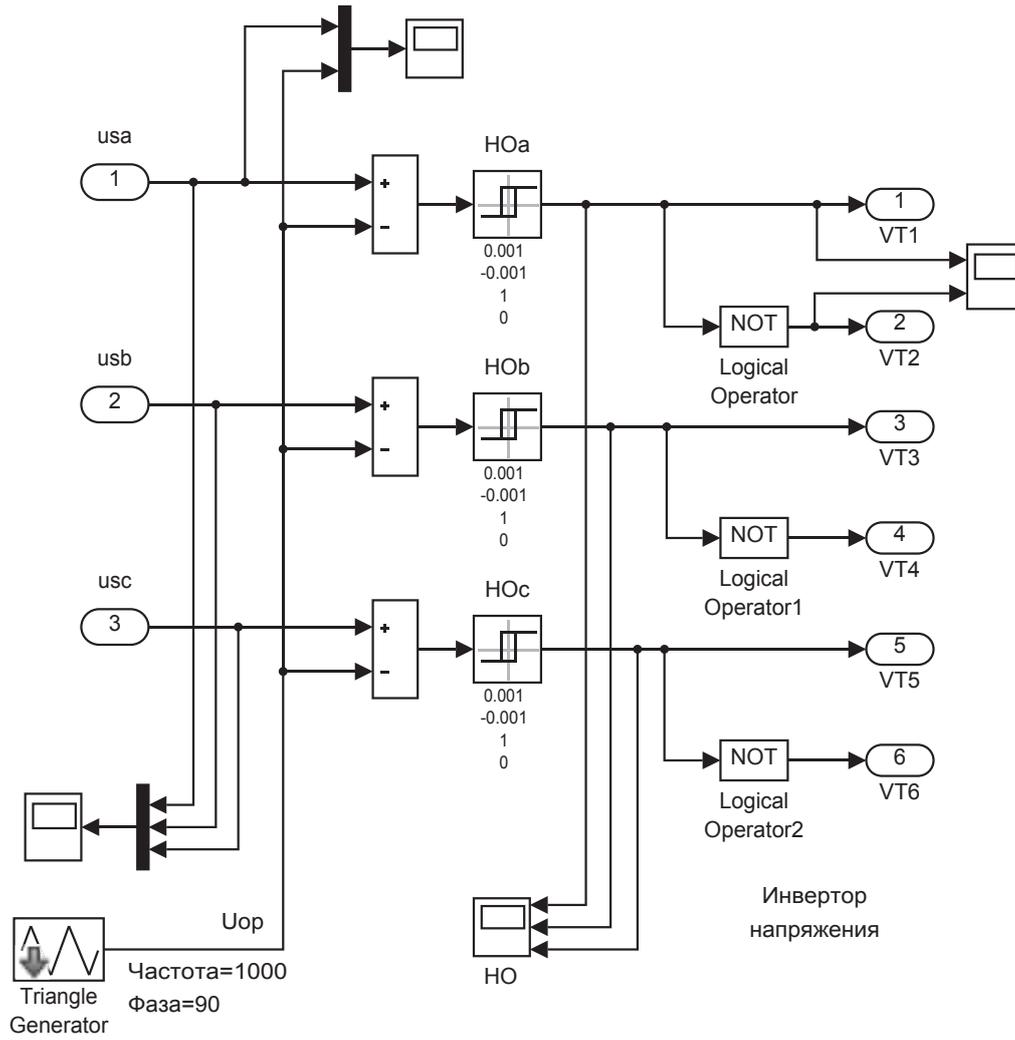


Рис. 2. Блок «Синусоидальная ШИМ»

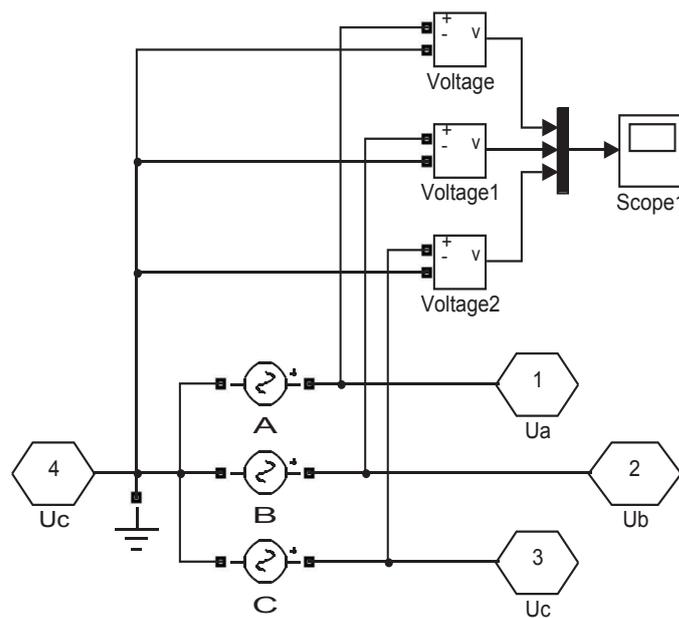


Рис. 3. Трехфазная сеть

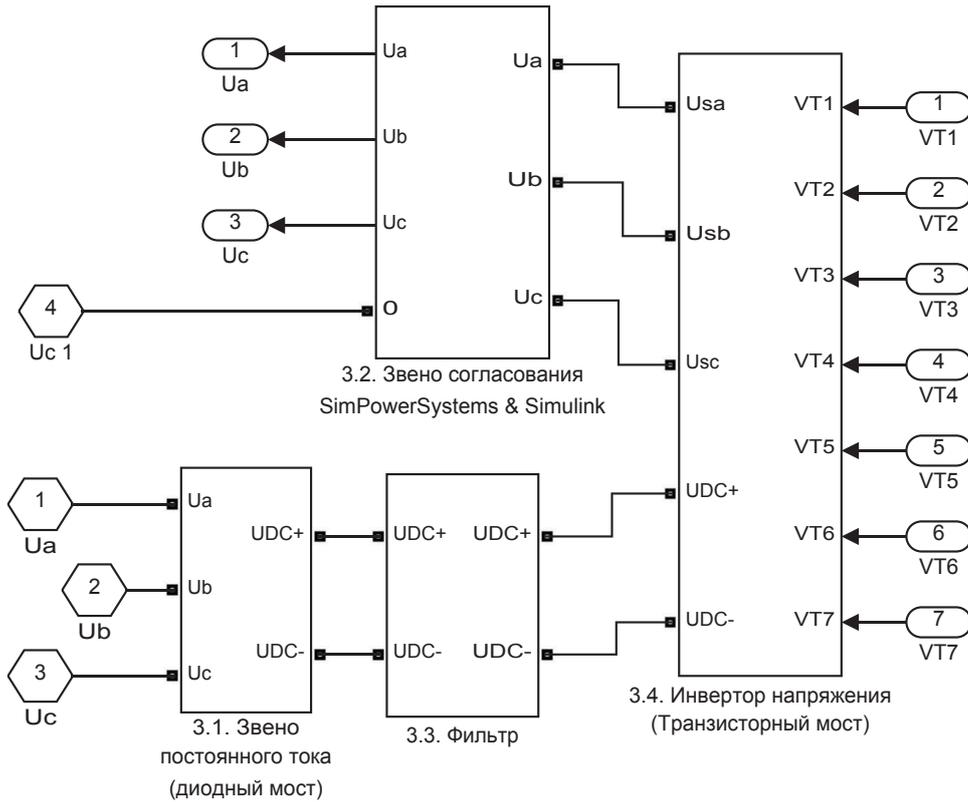


Рис. 4. Силовая часть

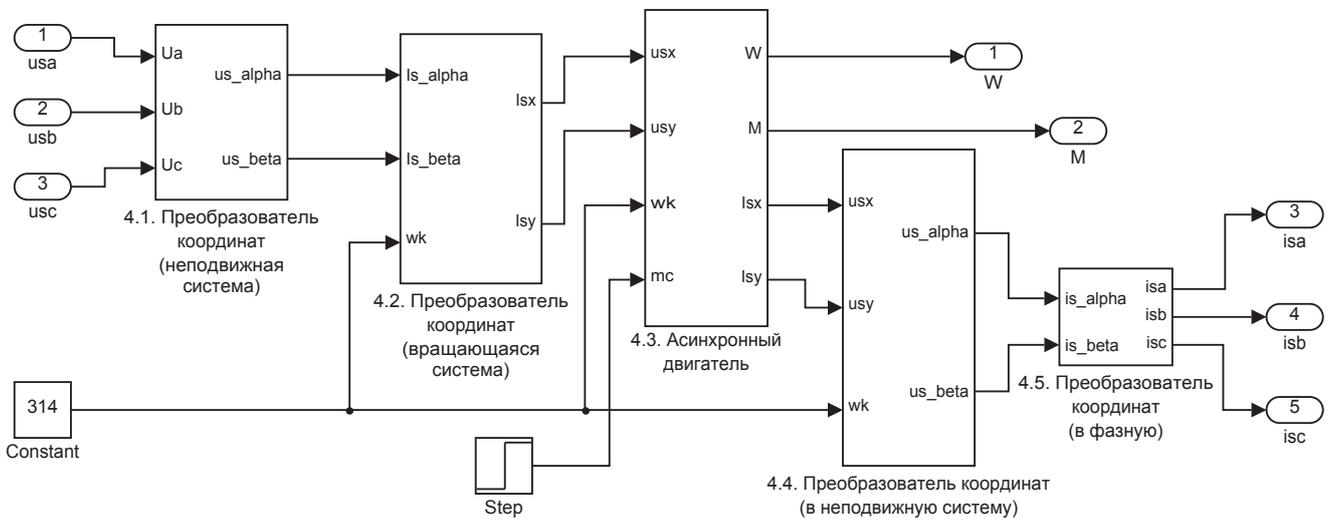


Рис. 5. Асинхронный двигатель и преобразователи координат

Элемент 3 (силовая часть) состоит из следующих субблоков:

- 3.1. Звено постоянного тока (диодный мост) (рис. 6).
- 3.2. Звено согласования SimPowerSystems & Simulink (рис. 7).
- 3.3. Фильтр (рис. 8).
- 3.4. Инвертор напряжения (транзисторный мост) (рис. 9).

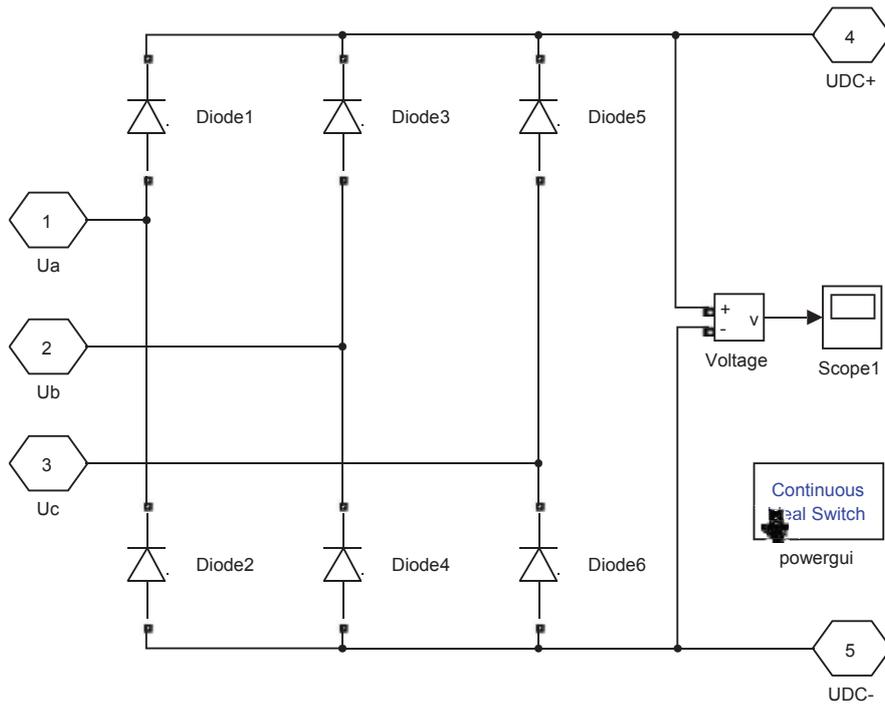


Рис. 6. Звено постоянного тока (диодный мост)

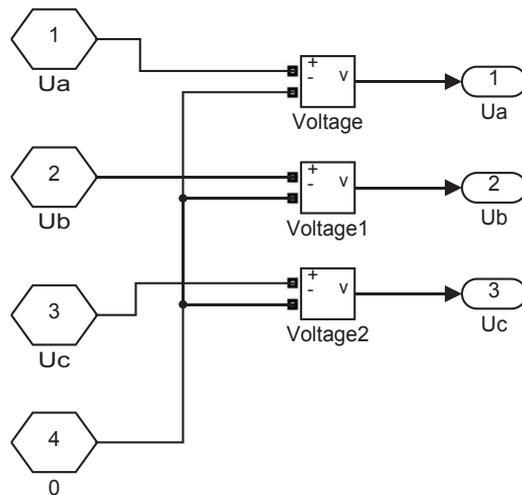


Рис. 7. Звено согласования SimPowerSystems & Simulink

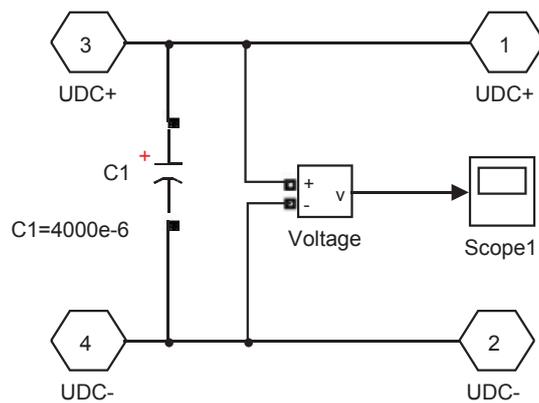


Рис. 8. Фильтр

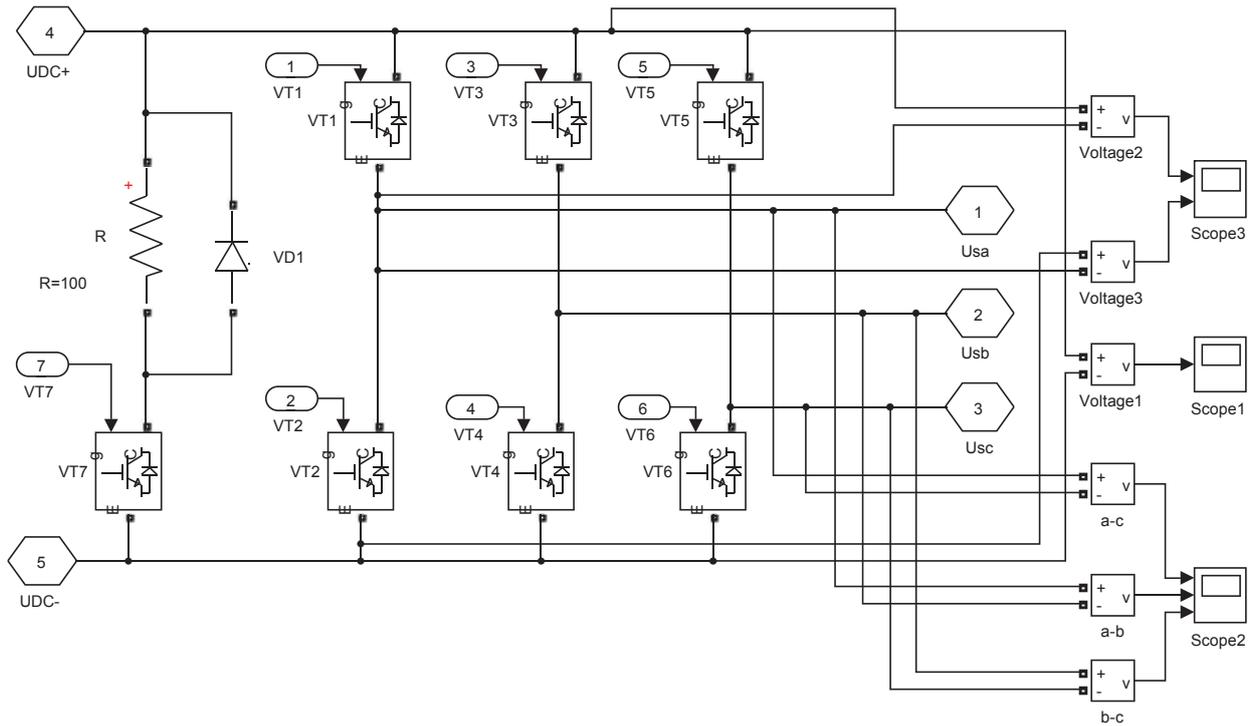


Рис. 9. Инвертор напряжения (транзисторный мост)

Элемент 4 (асинхронный двигатель и преобразователи координат) содержит субблоки:

- 4.1. Преобразователь координат из трехфазной системы в неподвижную (рис. 10).
- 4.2. Преобразователь координат из неподвижной системы во вращающуюся (рис. 11).
- 4.3. Модель асинхронного двигателя (рис. 14).
- 4.4. Обратное преобразование из вращающейся системы координат в неподвижную (рис. 12).
- 4.5. Преобразователь координат из неподвижной системы в трехфазную (рис. 13).

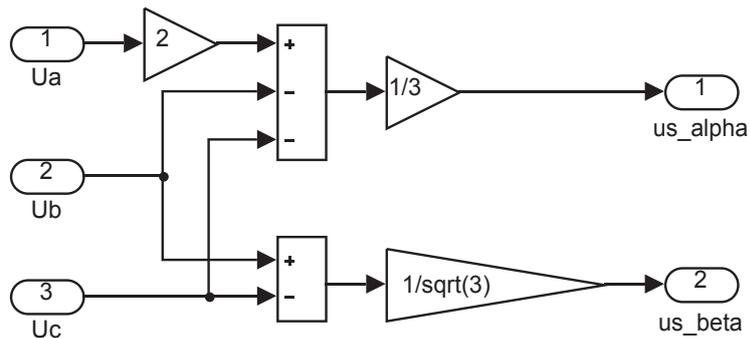


Рис. 10. Преобразователь координат из трехфазной системы в неподвижную

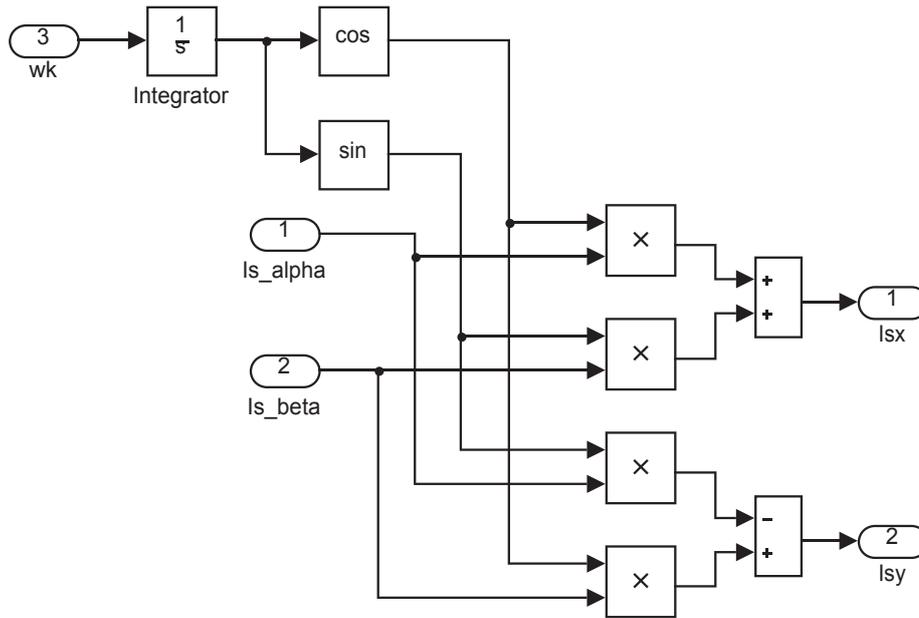


Рис. 11. Преобразователь координат из неподвижной системы во вращающуюся

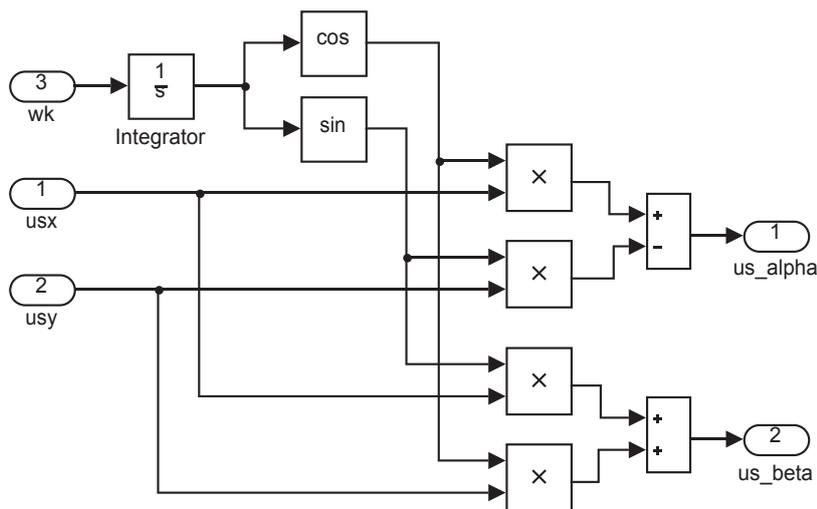


Рис. 12. Обратное преобразование из вращающейся системы координат в неподвижную

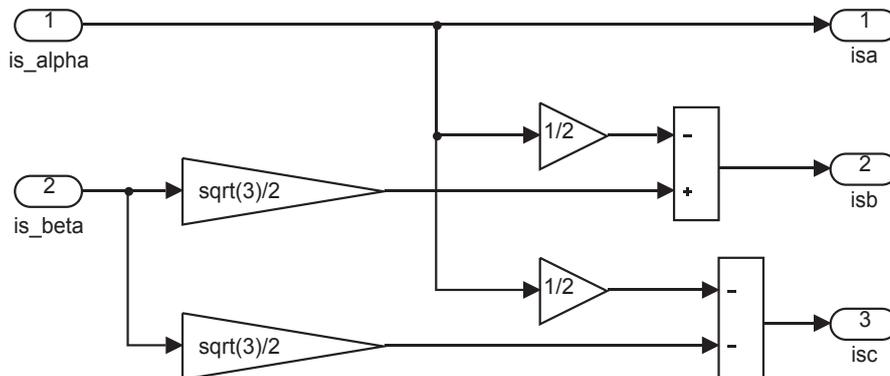


Рис. 13. Преобразователь координат из неподвижной системы в трехфазную

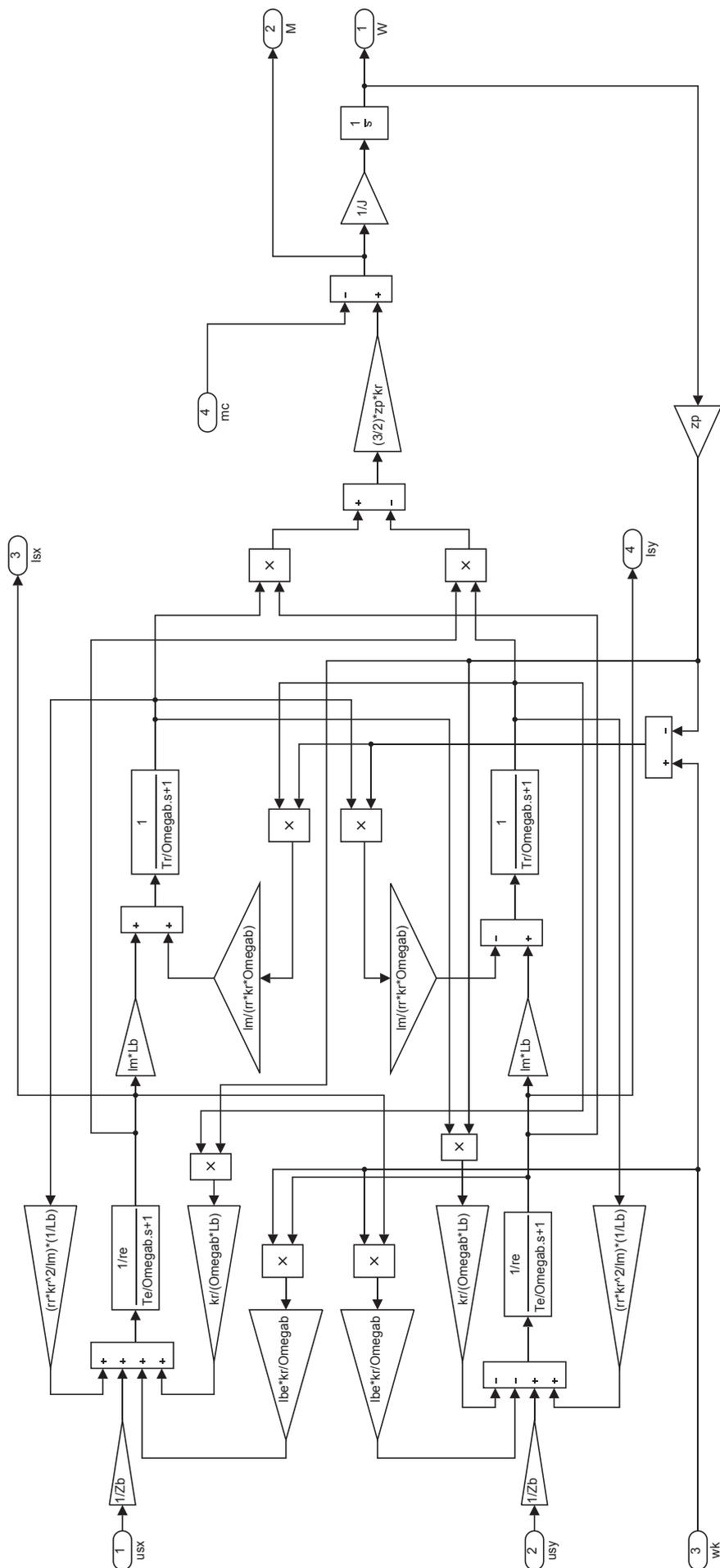


Рис. 14. Модель асинхронного двигателя

Результаты математического моделирования приведены на рис. 15, ..., 19.

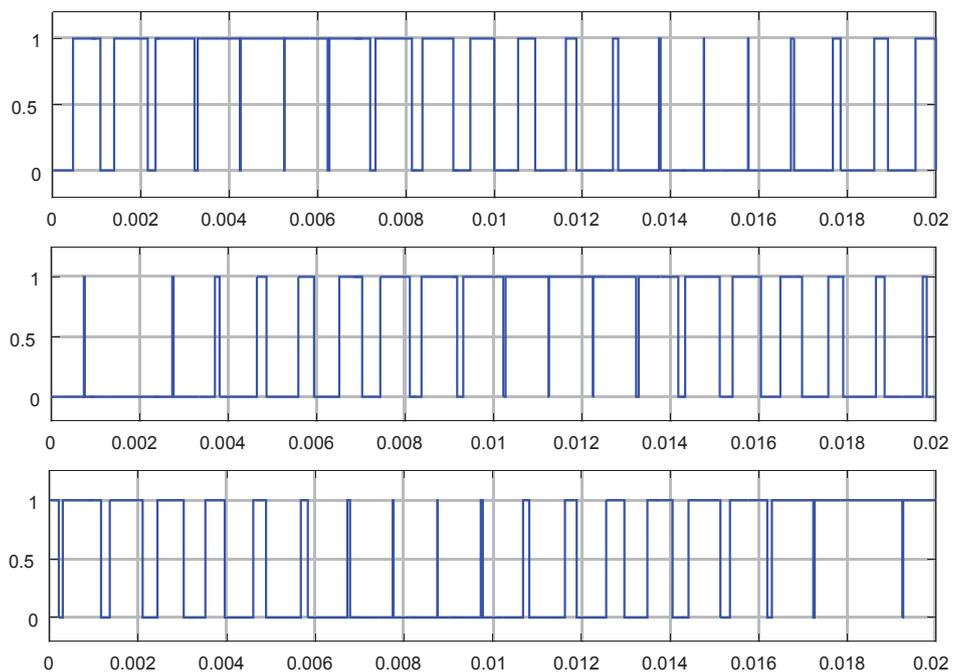


Рис. 15. Сигналы на выходе нуль-органов

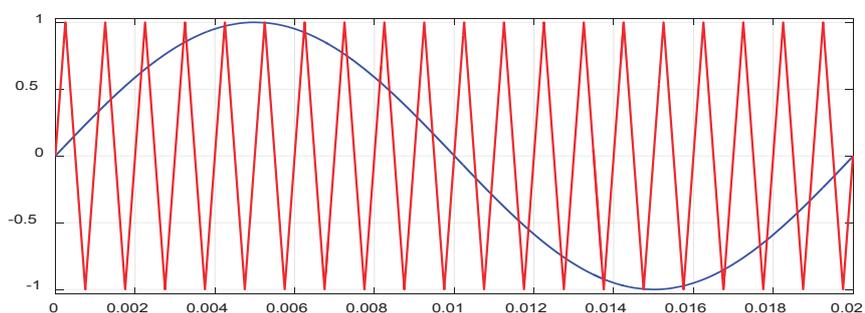


Рис. 16. Сравнение сигналов опорного напряжения с сигналом задания

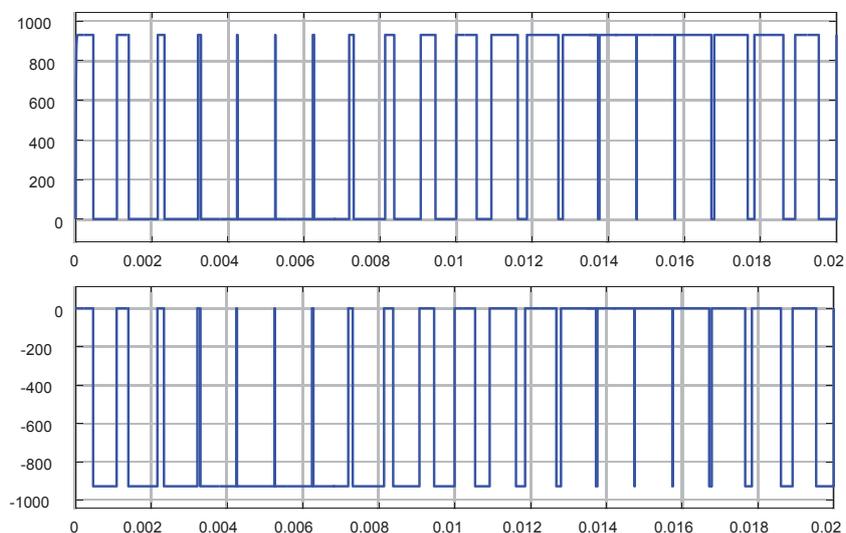


Рис. 17. Сравнение напряжений в стойке фазы «А» на Score3 в блоке инвертора напряжения

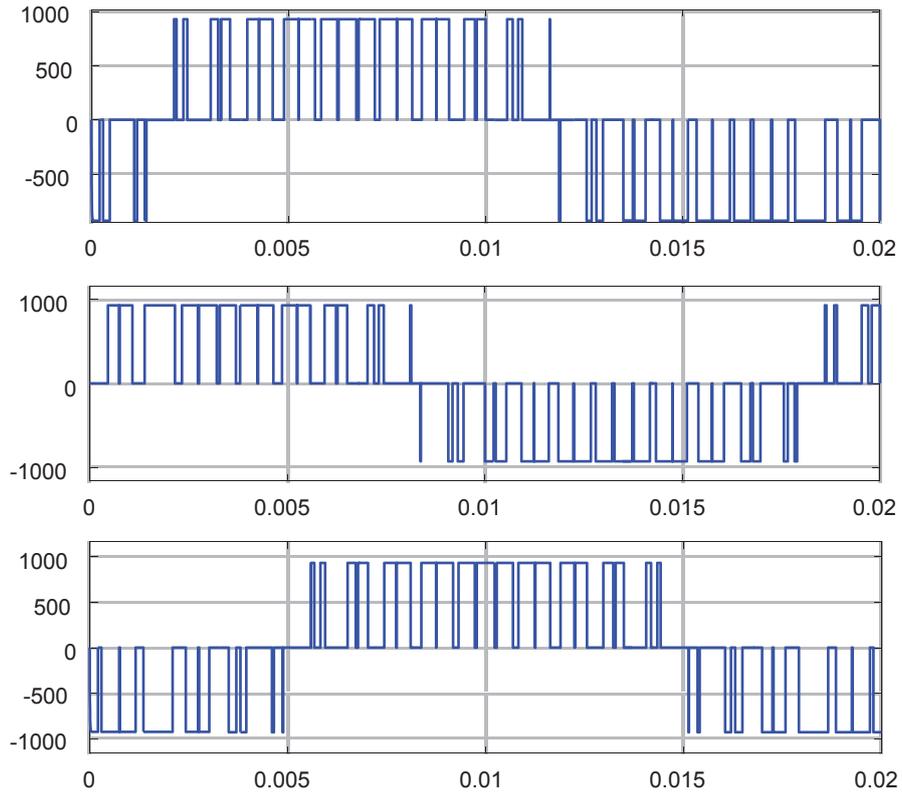


Рис. 18. Линейные напряжения на нагрузке

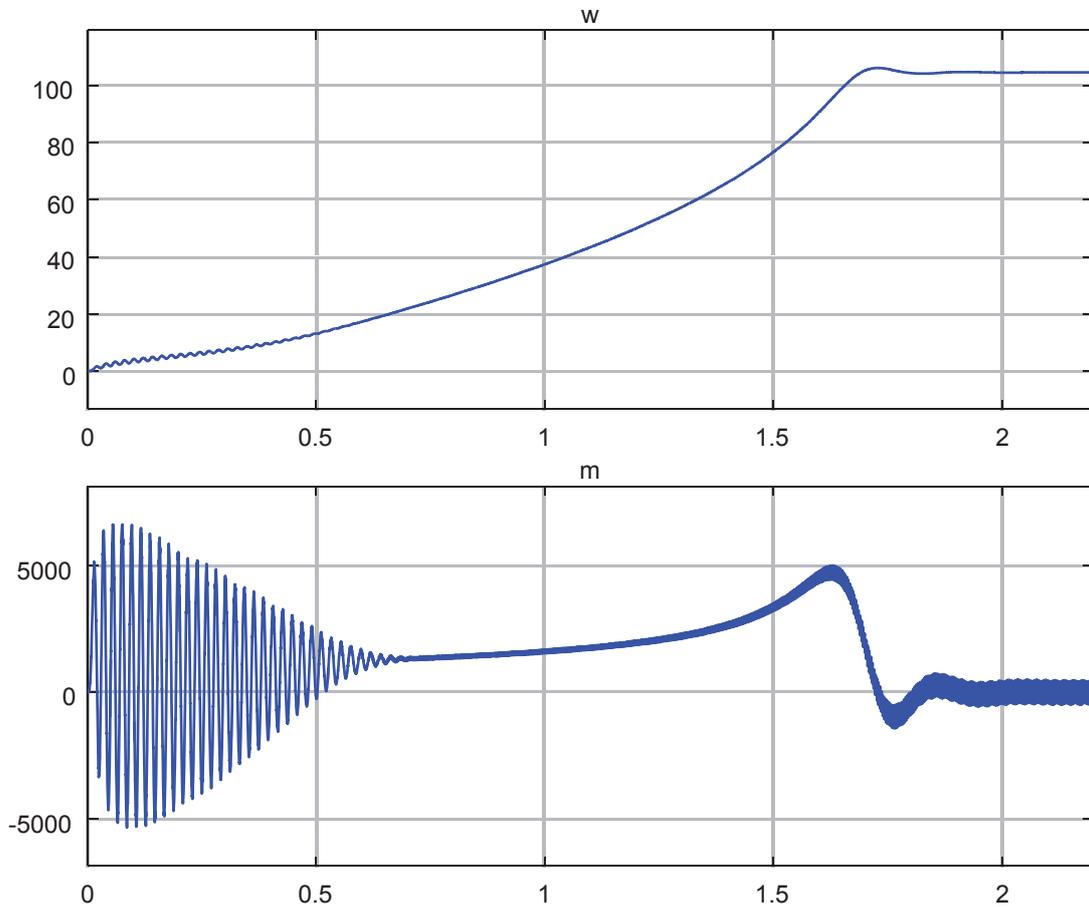


Рис. 19. Графики скорости и момента

Литература:

1. Емельянов, А.А., Бесклеткин В.В., Авдеев А.С., Чернов М.В., Киряков Г.А., Габзалилов Э.Ф. Моделирование САР скорости асинхронного двигателя с переменными  $\psi_r-i_s$  на основе апериодических звеньев в Script-Simulink // Молодой ученый. — 2015. — № 23. — с. 24–34.
2. Шрейнер, Р.Т. Электромеханические и тепловые режимы асинхронных двигателей в системах частотного управления: учеб. пособие / Р.Т. Шрейнер, А.В. Костылев, В.К. Кривовяз, С.И. Шилин. Под ред. проф. д.т. н. Р.Т. Шрейнера. — Екатеринбург: ГОУ ВПО «Рос. гос. проф. — пед. ун-т», 2008. — 361 с.
3. Шрейнер, Р.Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты. — Екатеринбург: УРО РАН, 2000. — 654 с.

## Проектирование двухскатной теплицы с эффективным использованием солнечного излучения

Ибрагимов Салим Сафарович, преподаватель  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Эта методика основана на использовании двух коэффициентов:  
 — коэффициент аккумулирования тепла  $\Pi$  ;  
 — коэффициент использования пола  $\beta$  .

Коэффициент  $\Pi$  определяется отношением суммарной аккумулируемой солнечной энергии  $Q_{ак}$  к суммарной входящей энергии  $Q_{вх}$  в период солнечного сияния  $\Pi = Q_{ак}/Q_{вх}$  , а коэффициент  $\beta$  есть отношение площади пола  $F_{пол}$  к общей площади поверхности ограждения теплиц  $F_{огр}$  и определяется в виде  $\beta = F_{пол}/F_{огр}$  .

Но автором [1] практически большое внимание уделяется коэффициенту  $\Pi$  и рекомендуется использовать их. Для определения этого коэффициента требуются искомые значения теплотехнических параметров материалов элементов конструкции: коэффициенты теплопередачи прозрачных и непрозрачных поверхностей, средняя температура изменения внутри и наружи теплицы, время и т. д. Видно, что выполняемые требования усложняют задачу определения оптимальных размеров теплиц. Поэтому авторы данной работы предпочли использовать коэффициент  $\beta$  для определения оптимальных размеров элементов модельной конструкции теплицы.

Для региона, расположенного на  $38^\circ$  северной широты, выбираем теплицу с двухскатными боковыми стенками  $\Delta ABC$  и  $\Delta A'B'C'$  (рис.2), с углом  $\angle A = 52^\circ$  наклонной поверхности  $ABB'A'$ , который направлен на юг и с углом  $\angle C = 38^\circ$  наклонной поверхности  $BCC'B'$ , который направлен на север. Такой выбор формы и расположение направления наклонной поверхности теплицы основывается на то, чтобы солнечное излучение поступало внутри теплицы: в зимний период максимально и в летний период минимально.

Длина теплицы  $AA' = BB' = CC' = L$  ; высота боковых стенок теплицы  $h$  ; высота дополнительных боковых стенок теплицы  $h_0$  ; углы  $\angle A = 52^\circ$  ,  $\angle C = 38^\circ$  и  $\angle B = 90^\circ$  .

На основе исходных данных вычислим площадь поверхности  $ABB'A'$ ,  $BCC'B'$ ,  $\Delta ABC$ ,  $\Delta A'B'C'$  и  $ACC'A'$  элементов и площадь поверхности ограждения модельной конструкции теплицы:

- площадь поверхности (фигуры)  $ABB'A'$  элемента модельной конструкции-  $F_1$
- площадь поверхности (фигуры)  $BCC'B'$  элемента модельной конструкции-  $F_2$
- площади поверхности (фигур)  $\Delta ABC$  и  $\Delta A'B'C'$  элементов модельной конструкции-  $F_{1\sigma}$  и  $F_{2\sigma}$
- площадь поверхности (фигуры)  $ACC'A'$  элемента модельной конструкции-  $F_{пол}$
- площадь поверхности (фигур)  $ACMK = A'C'M'K'$ ,  $AA'K'K = CC'M'M' - F_o$

Площадь поверхности ограждения модельной конструкции теплицы —  $F_{огр}$

Коэффициент использования пола определяется как отношение площади поверхности пола на площадь поверхности ограждения модельной конструкции теплицы:

$$F_{огр} = F_1 + F_2 + F_{1\sigma} + F_{2\sigma} + F_{пол} + F_o =$$

$$= \frac{h}{\sin 52} \cdot L + \frac{h}{\sin 38} \cdot L + h^2 \left( \frac{1}{\operatorname{tg} 52} + \frac{1}{\operatorname{tg} 38} \right) + h \cdot L \left( \frac{1}{\operatorname{tg} 52} + \frac{1}{\operatorname{tg} 38} \right) + 2h_o L + 2h_o h \cdot \left( \frac{1}{\operatorname{tg} 52} + \frac{1}{\operatorname{tg} 38} \right)$$

Для вычисления коэффициента использования пола  $\beta$  исходным данным принимаем:  $h = 0,0,5,1,1,5,2,2,5, \dots, 4,5,5,5, \text{м}$ ;  $L = 10, 20, 30, \dots, 80, 90, 100 \text{ м}$   $h_o = 2 \text{ м}$ .

Вычисление  $\beta$  соответственно  $h$  и  $L$  проводилось в среде «Mathcad», результаты которых графически представлены как зависимость  $\beta$  от высоты  $h$  и длины  $L$  теплицы.

По характеру кривых  $f(h, L)$  видно, что с увеличением длины теплицы от  $L = 5 \text{ м}$  до  $L = 100 \text{ м}$  максимальное значение коэффициента использования пола  $\beta$  смещаются в сторону уменьшения высоты теплицы  $h$ .

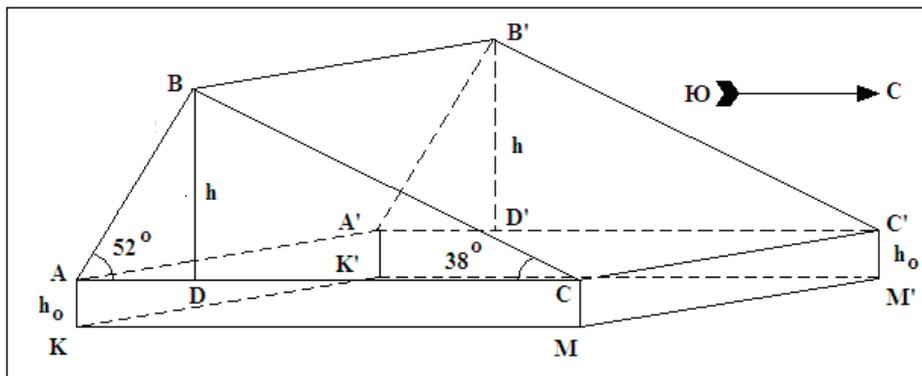
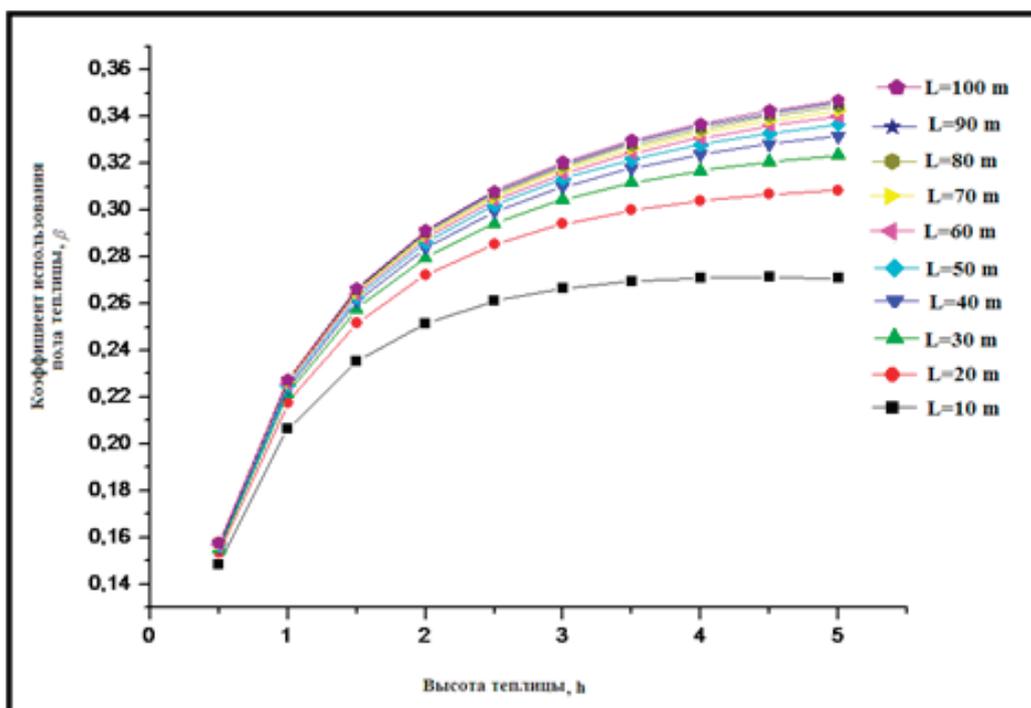


Схема для вычисления



Зависимость коэффициента использования пола от высоты теплицы при разной длине

Выбранные значения высоты  $h$  соответственно длины  $L$  и объем паровоздушной смеси двухскатной теплицы.

Длина теплицы	L=10m	L=20m	L=30m	L=40m	L=50m	L=60m	L=70m	L=80m	L=90m	L=100m
Высота теплицы	h=3m	h=3,5m	h=4m	h=4,5m	h=5m	h=5m	h=5m	h=5m	h=5m	h=5m

Литература:

1. Якубов, Ю. Н. Аккумуляция энергии солнечного излучения. Ташкент, Издательство «ФАН» Р. Уэ.1981.103с.

## Определение геометрических размеров теплицы и способы подбора материалов

Ибрагимов Салим Сафарович, преподаватель  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Для определения тепловой потери в стенках элементов модельной конструкции теплицы авторы данной статьи рекомендуют использовать нововведенные коэффициенты тепловых потерь ( $\beta_1, \beta_2, \beta_3', \beta_3''$  и  $\beta_o$ ), которые определяются следующим образом:

– коэффициент тепловой потери элемента конструкции (фигуры)  $ABB'A' - \beta_1$

$$\beta_1 = \frac{F_1}{F_{опр}} = \frac{F_1}{F_1 + F_2 + F_{1\sigma} + F_{2\sigma} + F_{пол} + F_o} =$$

$$= \frac{\frac{h}{\sin 52} \cdot L}{\frac{h}{\sin 52} \cdot L + \frac{h}{\sin 38} \cdot L + h^2 \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + h \cdot L \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + 2h_o L + 2h_o h \cdot \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right)}$$

коэффициент тепловой потери элемента модельной конструкции (фигуры)  $BCC'B' - \beta_2$

$$\beta_2 = \frac{F_2}{F_{опр}} = \frac{F_2}{F_1 + F_2 + F_{1\sigma} + F_{2\sigma} + F_{пол} + F_o} =$$

$$= \frac{\frac{h}{\sin 38} \cdot L}{\frac{h}{\sin 52} \cdot L + \frac{h}{\sin 38} \cdot L + h^2 \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + h \cdot L \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + 2h_o L + 2h_o h \cdot \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right)}$$

коэффициент тепловой потери элементов модельной конструкции (фигуры)  $\Delta ABC$  и  $\Delta A'B'C' - \beta_3'$  и  $\beta_3''$

$$\beta_3' = \frac{F_{1\sigma}}{F_{опр}} = \frac{F_{1\sigma}}{F_1 + F_2 + F_{1\sigma} + F_{2\sigma} + F_{пол} + F_o} =$$

$$= \frac{\frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right)}{\frac{h}{\sin 52} \cdot L + \frac{h}{\sin 38} \cdot L + h^2 \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + h \cdot L \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + 2h_o L + 2h_o h \cdot \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right)}$$

$$\beta_3'' = \frac{F_{2\sigma}}{F_{опр}} = \frac{F_{2\sigma}}{F_1 + F_2 + F_{1\sigma} + F_{2\sigma} + F_{пол} + F_o} =$$

$$= \frac{\frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right)}{\frac{h}{\sin 52} \cdot L + \frac{h}{\sin 38} \cdot L + h^2 \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + h \cdot L \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + 2h_o L + 2h_o h \cdot \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right)}$$

коэффициент тепловой потери элемента конструкции (фигуры)  $ACMK = A'C'M'K', AA'K'K = CC'M'M' - \beta_4$

$$\beta_o = \frac{F_o}{F_{опр}} = \frac{F_o}{F_1 + F_2 + F_{1\sigma} + F_{2\sigma} + F_{пол} + F_o} =$$

$$= \frac{2h_o L + 2h_o h \cdot \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right)}{\frac{h}{\sin 52} \cdot L + \frac{h}{\sin 38} \cdot L + h^2 \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + h \cdot L \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + 2h_o L + 2h_o h \cdot \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right)}$$

На основе вышеприведенных данных авторами выявлены значения коэффициентов тепловых потерь каждого элемента модельной конструкции рекомендуемой теплицы (рис.2):  $\beta_1 = 0,15$ ;  $\beta_2 = 0,25$ ;  $\beta_3' = \beta_3'' = 0,03$ ;  $\beta_o = 0,14$ , соответственно коэффициент использования пола  $\beta = 0,43$ .

Полученные результаты показывают, что наибольшее значение коэффициента тепловой потери, приходится в наклонной поверхности, расположенной под углом  $38^\circ$  к горизонту и направленной к югу —  $\beta_2 = 0,25$ .

Известно, что преимущество опытов, проведенных многими учеными мира на лабораторных моделях конструкций солнечных установок заключается в следующем:

сравнительно малые размеры конструкций установки позволяют легко добиться практически полной герметичности в сравнительно низких практических затратах;

исключает действие вредных факторов (обмен воздуха и влаги внутри и снаружи теплиц, вход дождливых капель, утечка тепловых потоков через щели и т. д.).

Проведение экспериментальных исследований по достижению оптимального режима работы установки дает возможность провести сравнительный анализ температурно-влажностного, радиационного режима работы низкопотенциальных солнечных установок и оценить их аккумулирующую способность солнечной энергии.

Для достоверности полученных результатов вычисления, авторами создана лабораторно-экспериментальная конструкция модели солнечной теплицы двухскатного типа соответственно по масштабу 1:0.02 и исследован режим работы.

Корпус лабораторно-экспериментальной установки теплицы изготовлен из деревянных брусков, размером поперечного сечения бруска  $1\text{см} \times 1\text{см}$  и  $0,5\text{см} \times 0,5\text{см}$ , снаружи корпус теплицы покрыт полиэтиленовой пленкой. Натурное изображение лабораторно-экспериментальной модели конструкции солнечной теплицы двухскатного типа представлен на рис.1.



Рис. 1. Натурное изображение лабораторно-экспериментальной теплицы

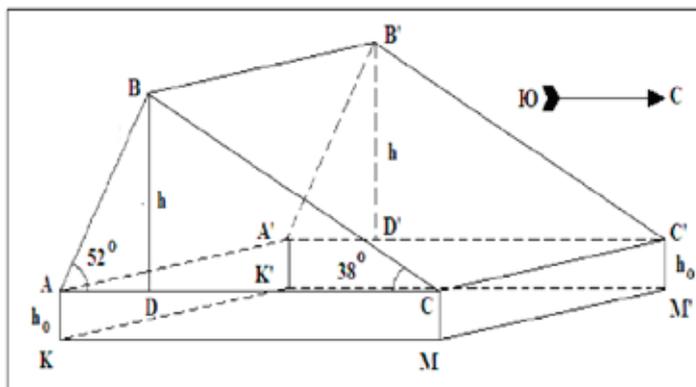


Рис.2. Схема для вычисления

Литература:

1. Закон Республики Узбекистан «О рациональном использовании энергии. (Ведомости Олий Мажлиса Республики Узбекистан, 1997 г., № 4–5, ст. 118; 2003 г., № 5, ст. 67; Собрание законодательства Республики Узбекистан, 2007 г., № 39, ст. 402; 2013 г., № 18, ст. 233, № 41, ст. 543).

## Генерация крупномасштабных магнитных полей и вихревых структур во вращающейся электропроводящей самогравитирующей среде с мелкомасштабной неспиральной силой

Копп Михаил Иосифович, кандидат физико-математических наук

*В настоящей работе найдена новая крупномасштабная неустойчивость во вращающейся стратифицированной самогравитирующей электропроводящей среде с мелкомасштабной турбулентностью. Турбулентность возбуждается внешней мелкомасштабной силой с нулевой спиральностью и малым числом Рейнольдса. Теория построена на основе метода многомасштабных асимптотических разложений. В пятом порядке теории возмущений получены основные уравнения, описывающие неустойчивости типа гидродинамического и магнетогидродинамического  $\alpha$ -эффектов во вращающейся турбулентной среде. Получены критерии возникновения двух  $\alpha$ -эффектов при наличии мелкомасштабных пульсаций магнитного поля с нулевой спиральностью. Численные оценки характерных масштабов крупномасштабной неустойчивости приведены на примере галактической плазмы.*

**Ключевые слова:** сила Кориолиса, многомасштабные асимптотические разложения, стратифицированная самогравитирующая электропроводящая среда, неспиральная мелкомасштабная турбулентность,  $\alpha$ -эффект, спиральные галактики

*In this paper we found a new large-scale instability in the rotating self-gravitating stratified electrically conductive medium to small-scale turbulence. Turbulence excited small-scale external force with zero helicity and low Reynolds number. The theory is based on the method of multi-scale asymptotic expansions. In the fifth-order perturbation theory, the basic equations that describe the type of hydrodynamic and magnetohydrodynamic  $\alpha$ -effects in the rotating turbulent medium. Criteria for the occurrence of the two  $\alpha$ -effects in the presence of small-scale magnetic field fluctuations with zero helicity are obtained. Numerical evaluation of the characteristic scales instability shown by the example of the galactic plasma.*

**Keywords:** coriolis force, multiscale asymptotic expansions, self-gravitating stratified conductive medium, non-spiral small-scale turbulence,  $\alpha$ -effect, spiral galaxies

Открытое в работах [1–6] явление генерации крупномасштабных магнитных полей однородной изотропной, но зеркально-несимметричной (спиральной) турбулентностью получило название  $\alpha$ -эффекта. На основе этого эффекта были построены различные теории, объясняющие происхождение магнитных полей у различных астрофизических объектов: планет и Солнца [1–5], галактик [6] и т.п. В последнем обзоре по этой теме [7] широко обсуждаются лабораторные динамо-эксперименты. Развитие вычислительной физики [7] также способствовало применению  $\alpha$ -теорий к различным прикладным задачам, что в конечном счете привело к определению нового самостоятельного раздела физики — теории динамо. В современном понимании теория динамо включает в себя и так называемое вихревое динамо, которое описывает эффект генерации крупномасштабных вихрей в турбулентных средах [8]. Теория вихревого динамо началась с работы [9], где была высказана гипотеза о том, что спиральная турбулентность способна генерировать крупные вихри. Эта гипотеза основывалась на сходстве уравнений индукции магнитного поля  $\vec{B}$  и вихря  $\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{v}$  в гидродинамике. Однако в работе [10] было показано отсутствие эффекта генерации крупномасштабных вихрей однородной изотропной спиральной турбулентностью в несжимаемой жидкости. Причина отрицательного эффекта заключается в определенной симметрии тензора напряжений Рейнольдса в осредненном уравнении Навье-Стокса. Несмотря на запрет этой теоремы антидинамо, первый пример вихревого динамо в спиральной турбулентности для сжимаемой жидкости был найден в работе [11]. Там впервые было получено линеаризованное уравнение для вихря  $\vec{\Omega}$ , которое по виду похоже на уравнение индукции для среднего поля  $\vec{B}$ . Эффект генерации крупномасштабных вихрей связан с появлением члена  $\alpha \text{rot} \vec{\Omega}$ , где  $\alpha$  выражается через спиральность турбулентности. Этот эффект получил название гидродинамического альфа-эффекта. Дальнейшее направление развития теории вихревого динамо было основано на поиске дополнительных факторов, нарушающих симметрию уравнений. Этими факторами, кроме сжимаемости среды, являются например, неоднородный поток [12], градиент температуры в поле тяжести [13], частицы примеси и пузырьки воздуха в жидкости [12]. На начальном этапе развития теории динамо, замкнутые уравнения для средних (крупномасштабных) полей были получены в основном при помощи метода электродинамики среднего поля (или теории корреляционного сглаживания второго порядка) [5] и функциональной техники [14, 15]. Оба эти метода

в применении к задачам теории динамо имеют главный недостаток, заключающийся в трудности определения из всей иерархии возмущений главного порядка при котором возникает неустойчивость. В связи с этим, в работе [16] была рассмотрена крупномасштабная неустойчивость в несжимаемой жидкости методом асимптотических многомасштабных разложений. В качестве малого параметра для асимптотического метода многомасштабных разложений используется число Рейнольдса  $R = \frac{v_0 \ell_0}{\lambda_0} \ll 1$  для мелкомасштабных пульсаций скорости  $v_0$ , вызванных мелкомасштабной силой. Модель внешней мелкомасштабной силы была выбрана с нарушением четности (при нулевой спиральности). Эффект генерации крупномасштабных возмущений такой силой получил название анизотропного кинетического альфа-эффекта или АКА-эффекта [16]. Отметим, что нарушение четности является наиболее общим понятием, чем спиральность, хотя именно спиральность  $\overline{v \text{rot} v} \neq 0$  является самым распространенным механизмом нарушения четности гидродинамических течений. В дальнейшем, применяя метод многомасштабных асимптотических разложений были разработаны линейные и нелинейные теории вихревого динамо для сжимаемых сред [17, 18], конвективных сред со спиральной внешней силой [19–21], для сред с учетом эффектов вращения [22–25]. В упомянутых выше работах спиральная турбулентность считалась заданной. Генерацию спиральной турбулентности в природных условиях обычно связывают с влиянием силы Кориолиса (или силы Лоренца) на турбулентное движение среды [1, 26], которое изначально было однородным изотропным и зеркально-симметричным (неспиральным). В связи с этим возникает вопрос о возможности генерации крупномасштабных полей (вихревых и магнитных) во вращающихся средах под действием мелкомасштабной силы с нулевой спиральностью:  $\vec{F}_0 \text{rot} \vec{F}_0 = 0$ .

Используя метод многих масштабов, в настоящей работе рассмотрена генерация крупномасштабных полей (магнитных и вихревых) в стратифицированной вращающейся электропроводящей среде с учетом ее самогравитации. Данная работа является обобщением работы [25] на случай электропроводящей среды. Полученные здесь инкременты неустойчивости соответствуют гидродинамическому и магнитогидродинамическому альфа-эффектам, которые возникают в результате совместного действия неспиральной силы, вращения и стратификации среды. Рассмотрено также влияние мелкомасштабных магнитных флуктуаций  $\vec{B}_0$  с нулевой спиральностью  $\vec{B}_0 \text{rot} \vec{B}_0 = 0$  на генерацию крупномасштабных вихревых и магнитных полей. Результаты настоящей работы могут найти применение к ряду астрофизических задач.

**Основные уравнения и постановка задачи.**

Динамику вращающейся электропроводящей среды (плазмы) с учетом ее самогравитации описываем хорошо известными уравнениями магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla P}{\rho_{00}} + \frac{\rho}{\rho_{00}^2} \nabla P_{00} - \nabla \Phi + 2[\vec{V} \times \vec{\Omega}] + \frac{1}{4\pi\rho_{00}} [\text{rot} \vec{B} \times \vec{B}] + \nu \Delta \vec{V} + \eta \nabla \text{div} \vec{V} + \vec{F}_0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) + \vec{V} \nabla \rho_{00} + \rho_{00} \text{div} \vec{V} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}[\vec{V} \times \vec{B}] + \nu_m \Delta \vec{B} \tag{3}$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \text{div} \vec{B} = 0 \tag{4}$$

Здесь  $\vec{V}$ ,  $\rho$ ,  $P$ ,  $\vec{B}$ ,  $\Phi$  — возмущения скорости, плотности, давления, индукции магнитного поля и гравитационного потенциала среды относительно равновесного состояния:

$$\nabla P_{00} = -\rho_{00} \nabla \Phi_{00} - \rho_{00} [\vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}]] \tag{5}$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор элемента среды. Коэффициенты  $\nu$  и  $\eta = \nu \left( \frac{1}{3} + \frac{\zeta}{\mu} \right) = k\nu$  соответствуют первой и второй кинематической вязкости для сжимаемой среды,  $\zeta, \mu$  — коэффициенты динамической вязкости,  $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma_c}$  — коэффициент магнитной вязкости,  $\sigma_c$  — коэффициент электропроводности среды,  $G$  - гравитационная постоянная.

С целью упрощения вычислений выберем декартовую геометрию задачи, для которой вектор угловой скорости  $\vec{\Omega} = \vec{e} \Omega$  считаем постоянным и направленным вдоль оси  $OZ$  вертикально вверх ( $\vec{e}$  - единичный вектор по вертикали). Уравнения (1)-(4) дополним уравнением состояния среды, которое для простоты выберем в виде:

$$P = \rho c_s^2 \tag{6}$$

Здесь  $c_s$  — скорость звука. Уравнение равновесия (5), используя (6), перепишем в следующем виде:

$$c_s^2 \frac{\nabla \rho_{00}}{\rho_{00}} = c_s^2 \vec{k}_\rho = -\nabla \Phi_{00} - \left[ \vec{\Omega} \times \left[ \vec{\Omega} \times \vec{r} \right] \right] \quad (7)$$

Здесь  $\vec{k}_\rho = \vec{e} k_\rho$ ,  $k_\rho = L_\rho^{-1}$ , где  $L_\rho = \left( \frac{d \ln \rho_{00}}{dz} \right)^{-1}$  - характерный масштаб неоднородности или стратификации среды,

которая возникает естественным образом в поле гравитации. Выбор обозначений для равновесного состояния (индекс с двумя нулями) связан с избеганием путаницы при использовании обозначений асимптотических разложений далее. В уравнение (1) включена внешняя сила  $\vec{F}_0$ , моделирующая источник возбуждения в среде мелкомасштабных и высокочастотных флуктуаций поля скорости  $\vec{v}_0$  с малым числом Рейнольдса  $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ . Рассмотрим неспиральную внешнюю силу  $\vec{F}_0$  со следующими свойствами:

$$\text{div } \vec{F}_0 = 0, \vec{F}_0 \text{rot} \vec{F}_0 = 0, \text{rot} \vec{F}_0 \neq 0 \quad (8)$$

$$\vec{F}_0 = f_0 \vec{F}_0 \left( \frac{x}{\lambda_0}; \frac{t}{t_0} \right) \quad (9)$$

где  $\lambda_0$  - характерный масштаб,  $t_0$  - характерное время,  $f_0$  - характерная амплитуда. Заметим, что мелкомасштабное магнитное поле  $\vec{B}_0$  в линейном приближении не может возбуждаться внешней мелкомасштабной силой  $\vec{F}_0$ , так как это следует из уравнения (3). Поэтому ниже мы рассмотрим два возможных сценария развития крупномасштабной неустойчивости. Первый, когда мелкомасштабное магнитное поле  $\vec{B}_0$  существует изначально, и второй, когда мелкомасштабное поле  $\vec{B}_0$  создается внешним источником  $\vec{F}_B$ , имеющим такие же топологические свойства как и сила  $\vec{F}_0$ , т. е.  $\vec{F}_B \text{rot} \vec{F}_B = 0$ . Естественно, что возбуждаемое таким источником магнитное поле также неспирально:  $\vec{B}_0 \text{rot} \vec{B}_0 = 0$ . Характерный масштаб источника  $\lambda_0^B$  и характерное время  $t_0^B$  удобно выбрать совпадающими с характерными масштабами  $\lambda_0$  и  $t_0$  соответственно, но характерные амплитуды этих источников будем предполагать разными:

$$\vec{F}_B = f_B \vec{F}_B \left( \frac{x}{\lambda_0}; \frac{t}{t_0} \right), f_0 \neq f_B.$$

Кроме того, среду для простоты будем считать безграничной и пренебрежем влиянием внешнего магнитного поля. В такой постановке проблема представляет интерес для теории динамо [2-6]. Теперь перейдем в уравнениях (1)-(4) к безразмерным переменным:

$$\vec{x} \rightarrow \frac{\vec{x}}{\lambda_0}, \quad t \rightarrow \frac{t}{t_0}, \quad \vec{v}_0 \rightarrow \frac{\vec{v}_0}{v_0}, \quad \vec{F}_0 \rightarrow \frac{\vec{F}_0}{f_0}, \quad \Phi \rightarrow \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \vec{B} \rightarrow \frac{\vec{B}}{B_0}, \quad t_0 = \frac{\lambda_0^2}{\nu}, \quad f_0 = \frac{v_0 \nu}{\lambda_0^2}, \quad \rho \rightarrow \frac{\rho}{\lambda_0 A}, \quad c_s \rightarrow \frac{c_s}{c_0}, \quad A = k_\rho \rho_{00},$$

$$\Phi_0 = \frac{v_0 \lambda_0}{t_0}$$

В безразмерных переменных уравнения (1)-(4) примут вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + R(\vec{v} \nabla) \vec{v} = -nc_s^2 \nabla \rho + \vec{e} n^2 c_s^2 \rho - \nabla \Phi + D[\vec{v} \times \vec{e}] + \tilde{Q} R[\text{rot} \vec{B} \times \vec{B}] + \Delta \vec{v} + k \nabla \text{div} \vec{v} + \vec{F}_0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + R \nabla(\rho \vec{v}) + (\vec{v} \nabla) \rho + \frac{1}{n} \text{div} \vec{v} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - Pm^{-1} \Delta \vec{B} = R \text{rot}[\vec{v} \times \vec{B}] + \vec{F}_B \quad (12)$$

$$\Delta \Phi = g \rho, \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad (13)$$

где  $n = k_\rho \lambda_0$  - параметр стратификации на масштабе  $\lambda_0$ ,  $g = n(\omega_G t_0)^2$ ,  $\omega_G = \sqrt{4\pi G \rho_{00}}$  - частота Джинса [26].

В уравнение (12) включен источник мелкомасштабных магнитных полей. Характер эволюции полей, описываемых системой уравнений (10)-(13), в значительной степени будет определяться следующими безразмерными параметрами:

$D = \frac{2\Omega \lambda_0^2}{\nu}$  - безразмерный параметр вращения на масштабе  $\lambda_0$ , связанный с числом Тейлора  $Ta = D^2$ ,

и являющийся характеристикой степени влияния сил Кориолиса над вязкими силами.  $\tilde{Q} = \frac{Q}{Pm}$ ,  $Q = \frac{\sigma_c B_0^2 \lambda_0^2}{c^2 \rho_{00} \nu}$  - число

Чандрасекара,  $Pm = \frac{\nu}{v_m}$  - магнитное число Прандтля. Малым параметром асимптотического разложения считаем

число Рейнольдса  $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ , а параметры  $D$  и  $\tilde{Q}$  произвольными, не влияющими на схему разложения.

Мелкомасштабная сила и внешний источник вызывают мелкомасштабные и высокочастотные флуктуации полей на фоне равновесного состояния. Средние значения таких флуктуаций нулевые, но из-за нелинейного взаимодействия в некоторых порядках теории возмущения возникают члены, которые при усреднении не обращаются в нуль. Такие члены называются секулярными и они будут условием разрешимости многомасштабного асимптотического разложения. Нахождение уравнений разрешимости, т. е. уравнений для крупномасштабных возмущений, и является основной задачей. Методика построения асимптотических уравнений хорошо развита в работах [16–25], следуя которым представим пространственные и временные производные в уравнениях (10)-(13) в виде асимптотического разложения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \partial_t + R^4 \partial_T, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \partial_i + R^2 \nabla_i \tag{14}$$

где  $\partial_i$  и  $\partial_t$  – обозначают производные по быстрым переменным  $x_0 = (\bar{x}_0, t_0)$ , а  $\nabla_i$  и  $\partial_T$  – производные по медленным переменным  $X = (\bar{X}, T)$ . Переменные  $x_0$  и  $X$  соответственно можно назвать мелкомасштабные и крупномасштабные переменные. Для переменных  $\vec{V}, \rho, \vec{B}, \Phi$  представим разложение в виде ряда по малому параметру R:

$$\begin{aligned} \vec{V}(\bar{x}, t) &= \vec{v}_0(x_0) + R(\vec{W}(X) + \vec{v}_1) + R^2 \vec{v}_2 + R^3 \vec{v}_3 + R^4 \vec{v}_4 + R^5 \vec{v}_5 + \dots \\ \vec{B}(\bar{x}, t) &= \vec{B}_0(x_0) + R(\vec{H}(X) + \vec{B}_1) + R^2 \vec{B}_2 + R^3 \vec{B}_3 + R^4 \vec{B}_4 + R^5 \vec{B}_5 + \dots \\ \rho(\bar{x}, t) &= \frac{1}{R} \rho_{-1}(X) + \rho_0(x_0) + R(\Pi(X) + \rho_1) + R^2 \rho_2 + R^3 \rho_3 + R^4 \rho_4 + R^5 \rho_5 + \dots \\ \Phi(\bar{x}, t) &= \frac{1}{R} \Phi_{-1}(\bar{X}) + \Phi_0(\bar{x}_0) + R(\Psi(\bar{X}) + \Phi_1) + R^2 \Phi_2 + R^3 \Phi_3 + R^4 \Phi_4 + R^5 \Phi_5 \dots \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя разложения (14)-(15) в систему уравнений (10)-(13) и собирая вместе члены с одинаковыми порядками по R до степени R<sup>5</sup> включительно, получим уравнения многомасштабного асимптотического разложения. В пятом порядке по R теории возмущений получим основную систему секулярных уравнений для описания эволюции крупномасштабных возмущений:

$$\begin{aligned} \partial_T W_i + W_k \nabla_k W_i + \nabla_k (\overline{v_0^k v_2^i} + \overline{v_2^k v_0^i}) - \overline{v_0^i \nabla_k v_2^k} - \Delta W_i = \\ = -nc_s^2 \nabla_i \overline{\rho_3} - \nabla_i \overline{\Phi_3} + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \nabla_m H_l H_k + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} (\overline{\nabla_m B_0^l B_2^k} + \overline{\nabla_m B_2^l B_0^k}) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\partial_T H_i - Pm^{-1} \Delta H_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \nabla_j (W_n H_p + \overline{v_0^n B_2^p} + \overline{v_2^n B_0^p}) \tag{17}$$

$$\nabla_i (\overline{\rho_0 v_2^i} + \overline{\rho_2 v_0^i}) = 0 \tag{18}$$

$$\Delta \Psi = 0 \tag{19}$$

Эти уравнения дополним секулярными уравнениями, полученными в других порядках по R:

$$W_z = 0, \quad \nabla_k W_k = 0, \quad \Delta \Phi_{-1} = 0, \quad \nabla_i H_i = 0, \quad \Pi = 0, \quad \Psi = \Psi(X) = const \tag{20}$$

$$DW_2 = \frac{d\Phi_{-1}}{dX}, \quad -DW_1 = \frac{d\Phi_{-1}}{dY}, \quad W_1 = W_x, \quad W_2 = W_y \tag{21}$$

Из уравнений (20) следует, что для крупномасштабных двумерных движений устанавливается баланс сил Кориолиса и гравитации. Двумерность поля скорости  $\vec{W}$  позволяет рассматривать уравнения (16)-(19) в рамках квазидвумерной задачи, когда крупномасштабные производные по Z предпочтительнее, т. е.  $\nabla_z \equiv \frac{\partial}{\partial Z} \gg \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}$  а крупномасштабные возмущения  $W_1, W_2, H_1, H_2, \Psi$  зависят только от Z - координаты:

$$W_{1,2} = W_{1,2}(Z), \quad H_{1,2} = H_{1,2}(Z), \quad \Psi = \Psi(Z) \tag{22}$$

На начальном этапе эволюцию крупномасштабных возмущений можно представить в виде плоской волны с волновым вектором  $\vec{K} \parallel OZ$ . Тогда из условия соленоидальности крупномасштабного магнитного поля:  $\nabla_i H_i = 0$  или  $\vec{K} \vec{H} = 0$  ясно, что поле  $\vec{H}$  имеет компоненты  $H_x = H_1, H_y = H_2$ . Для исследования устойчивости малых крупномасштабных возмущений в уравнениях (16)-(19) можно пренебречь нелинейными членами. В итоге упрощенная система уравнений, описывающая эволюцию крупномасштабных возмущений, принимает вид:

$$\partial_T W_1 - \nabla_z^2 W_1 + \nabla_z (\overline{v_0^z v_2^x} + \overline{v_2^z v_0^x} - \tilde{Q} (\overline{B_0^z B_2^x} + \overline{B_2^z B_0^x})) - \overline{v_0^x \nabla_z v_2^z} = 0 \tag{23}$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_z^2 W_2 + \nabla_z \left( \overline{v_0^z v_2^y} + \overline{v_2^z v_0^y} - \tilde{Q} \left( \overline{B_0^z B_2^y} + \overline{B_2^z B_0^y} \right) \right) - \overline{v_0^y \nabla_z v_2^z} = 0 \quad (24)$$

$$\partial_T H_1 - Pm^{-1} \nabla_z^2 H_1 = \nabla_z \left( \overline{v_0^x B_2^z} + \overline{v_2^x B_0^z} \right) - \nabla_z \left( \overline{v_0^z B_2^x} + \overline{v_2^z B_0^x} \right) \quad (25)$$

$$\partial_T H_2 - Pm^{-1} \nabla_z^2 H_2 = \nabla_z \left( \overline{v_0^y B_2^z} + \overline{v_2^y B_0^z} \right) - \nabla_z \left( \overline{v_0^z B_2^y} + \overline{v_2^z B_0^y} \right) \quad (26)$$

$$\nabla_z \left( \overline{v_0^z v_2^z} + \overline{v_2^z v_0^z} - \tilde{Q} \left( \overline{B_0^z B_2^z} + \overline{B_2^z B_0^z} \right) \right) - \overline{v_0^z \nabla_k v_2^z} = -\nabla_i \bar{U} \quad (27)$$

$$\nabla_z \left( \overline{\rho_0 v_2^z} + \overline{\rho_2 v_0^z} \right) = 0 \quad (28)$$

$$\nabla_z^2 \Psi = 0 \quad (29)$$

Поскольку исследуется проблема генерации крупномасштабных вихревых движений и магнитных полей во вращающейся электропроводящей среде с мелкомасштабными и высокочастотными флуктуациями, то достаточно получить уравнения (23)-(26) в замкнутом виде. Для этой цели нужно вычислить корреляторы:

$$- \nabla_z \left( \overline{v_0^z v_2^x} + \overline{v_2^z v_0^x} \right) + \overline{v_0^x \nabla_z v_2^z} + \tilde{Q} \left( \overline{B_0^z B_2^x} + \overline{B_2^z B_0^x} \right) = -\nabla_z T^{31} + R^{13} + \tilde{Q} \nabla_z S^{31} \quad (30)$$

$$- \quad (31)$$

$$G^{13} = \overline{v_0^x B_2^z} + \overline{v_2^x B_0^z}, \quad G^{31} = \overline{v_0^z B_2^x} + \overline{v_2^z B_0^x} \quad (32)$$

$$G^{23} = \overline{v_0^y B_2^z} + \overline{v_2^y B_0^z}, \quad G^{32} = \overline{v_0^z B_2^y} + \overline{v_2^z B_0^y} \quad (33)$$

Их вычисление осуществляется используя решения уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом и во втором порядках по  $R$ .

### Замкнутые уравнения для крупномасштабных полей

В целях упрощения расчетов, выберем неспиральную внешнюю силу  $\vec{F}_0$ , удовлетворяющую условиям (10), в следующем виде:

$$\vec{F}_0 = f_0 \left( \vec{i} \cos \varphi_2 + \vec{j} \cos \varphi_1 \right), \quad (34)$$

где  $f_0$  – амплитуда внешней силы,  $\varphi_1 = \vec{k}_1 \vec{x} - \omega_0 t$ ,  $\varphi_2 = \vec{k}_2 \vec{x} - \omega_0 t$ ,  $\kappa_1 = \kappa_0 (1, 0, 0)$ ,  $\kappa_2 = \kappa_0 (0, 1, 0)$ . Вид внешней силы  $\vec{F}_0$  (34) можно записать в комплексной форме:

$$\vec{F}_0 = \vec{i} \frac{f_0}{2} e^{i\varphi_2} + \vec{j} \frac{f_0}{2} e^{i\varphi_1} + c.c. \quad (35)$$

которая и будет использоваться в дальнейших вычислениях. Мелкомасштабное магнитное поле  $\vec{B}_0$  определяется следующим образом:

$$B_0^i = \frac{F_B^i}{\hat{h}}, \quad (36)$$

где введено обозначение для оператора  $\vec{D}_H = \partial_t - Pm^{-1} \partial^2$ . Отсюда видно, что топологические свойства мелкомасштабного поля будут заданы самим источником  $\vec{F}_B$ .

Для неспирального внешнего источника  $\vec{F}_B$  его вид можно аппроксимировать следующей формулой:

$$\vec{F}_B = f_B \left( \vec{i} \cos \varphi_2 + \vec{j} \cos \varphi_1 \right)$$

или в комплексной форме:

$$\vec{F}_B = \vec{i} \frac{f_B}{2} e^{i\varphi_2} + \vec{j} \frac{f_B}{2} e^{i\varphi_1} + c.c. \quad (37)$$

Отличие вида внешней неспиральной силы  $\vec{F}_0$  и источника  $\vec{F}_B$  состоит в разных по величине безразмерных амплитудах:  $f_0 \neq f_B$ . Используя приведенные выше соотношения (35), (37) и выражения для мелкомасштабных полей в нулевом и во втором порядках по  $R$  получим замкнутую систему уравнений, которая описывает эволюцию крупномасштабных полей скорости  $\vec{W}$  и магнитной индукции  $\vec{H}$ :

$$\partial_T W_1 - \nabla_z^2 W_1 + \alpha_1 \nabla_z W_1 - \alpha_2 \nabla_z W_2 + (\beta_1 + \gamma_1) \nabla_z H_1 - (\beta_2 + \gamma_2) \nabla_z H_2 + \tilde{Q} \beta_b \nabla_z H_2 = 0 \quad (38)$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_z^2 W_2 + \alpha_2 \nabla_z W_1 + \alpha_1 \nabla_z W_2 + (\beta_2 + \gamma_2) \nabla_z H_1 + (\beta_1 + \gamma_1) \nabla_z H_2 - \tilde{Q} \beta_b \nabla_z H_1 = 0 \quad (39)$$

$$\partial_T H_1 - Pm^{-1} \nabla_z^2 H_1 - (\alpha_H + \alpha_B) \nabla_z H_2 - (\beta_H + \beta_B) \nabla_z H_1 - \alpha_W \nabla_z W_2 = 0 \quad (40)$$

$$\partial_T H_2 - Pm^{-1} \nabla_z^2 H_2 + (\alpha_H + \alpha_B) \nabla_z H_1 - (\beta_H + \beta_B) \nabla_z H_2 + \alpha_W \nabla_z W_1 = 0 \tag{41}$$

Из уравнений (38)-(41) видно, что коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\beta_H + \beta_B$  отвечают за конвективный перенос крупномасштабных возмущений скорости  $\vec{W}$  и магнитного поля  $\vec{H}$  соответственно. Коэффициенты  $\alpha_2$  и  $\alpha_H + \alpha_B$  соответствуют гидродинамическому и МГД  $\alpha$ -эффектам с помощью которых происходит генерация вихревых и магнитных возмущений. Посредством коэффициентов  $\alpha_W, \beta_1 + \gamma_1, \beta_2 + \gamma_2 - \tilde{Q}\beta_b$  осуществляется взаимное влияние крупномасштабного поля скорости  $\vec{W} = (W_1, W_2)$  на динамику магнитного поля  $\vec{H} = (H_1, H_2)$  и наоборот. Если предположить отсутствие источника мелкомасштабных магнитных полей ( $f_B = 0$ ), то система самосогласованных уравнений (38)-(41) расщепляется на две пары не связанных уравнений для крупномасштабной скорости  $\vec{W}$ :

$$\begin{cases} \partial_T W_1 - \nabla_z^2 W_1 + \alpha_1 \nabla_z W_1 - \alpha_2 \nabla_z W_2 = 0 \\ \partial_T W_2 - \nabla_z^2 W_2 + \alpha_1 \nabla_z W_2 + \alpha_2 \nabla_z W_1 = 0 \end{cases} \tag{42}$$

и крупномасштабного магнитного поля  $\vec{H}$ :

$$\begin{cases} \partial_T H_1 - Pm^{-1} \nabla_z^2 H_1 - \alpha_H \nabla_z H_2 - \beta_H \nabla_z H_1 = 0 \\ \partial_T H_2 - Pm^{-1} \nabla_z^2 H_2 + \alpha_H \nabla_z H_1 - \beta_H \nabla_z H_2 = 0 \end{cases} \tag{43}$$

Первая система уравнений (42), за исключением конвективных членов, соответствует уравнениям гидродинамического  $\alpha$ -эффекта [8], который приводит к генерации крупномасштабных вихревых структур. Вторая система уравнений (43), также за исключением конвективных членов, описывает хорошо известный из теории динамо [1–7] МГД  $\alpha$ -эффект, приводящий к генерации крупномасштабного магнитного поля мелкомасштабной спиральной турбулентностью. Ниже рассмотрим генерацию крупномасштабных возмущений в более общем случае, который соответствует системе уравнений (38)-(41).

### Крупномасштабная неустойчивость.

Приступим сначала к анализу возможности появления крупномасштабной неустойчивости в системе уравнений (42)-(43). Для этого выберем крупномасштабные возмущения скорости  $W_1, W_2$  и магнитной индукции  $H_1, H_2$  в виде плоских волн с волновым вектором  $\vec{K} \parallel OZ$ :

$$W_{1,2} = (A_{W_{1,2}}) \exp(iKZ - i\omega T) \tag{44}$$

$$H_{1,2} = (A_{H_{1,2}}) \exp(iKZ - i\omega T),$$

где  $A_{W_{1,2}}, A_{H_{1,2}}$  — амплитуды волновых возмущений.

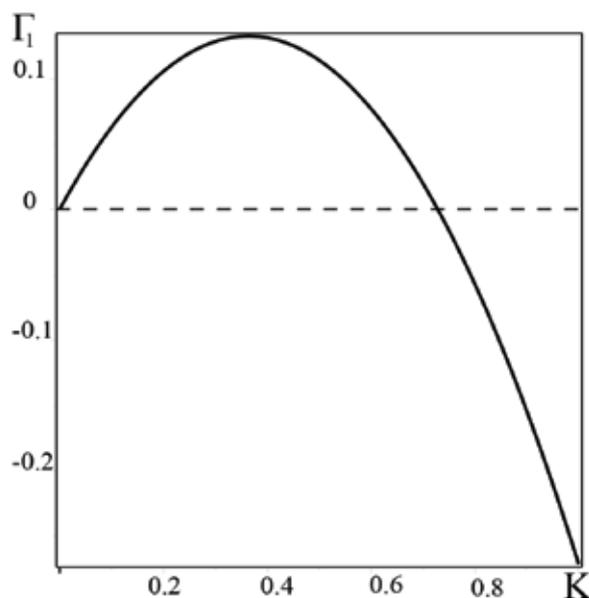


Рис. 1. График зависимости инкремента неустойчивости  $\Gamma_1$  от волновых чисел  $K$

Подставляя (44) в систему уравнений (42)-(43) получим дисперсионные уравнения для случая отсутствия источника мелкомасштабных магнитных полей ( $f_B = 0$ ):

$$\begin{aligned} (-i\omega + K^2 + i\alpha_1 K)^2 - \alpha_2^2 K^2 &= 0 \\ (-i\omega + Pm^{-1}K^2 - i\beta_H K)^2 - \alpha_H^2 K^2 &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Решения уравнений (45) содержат как реальную, так и мнимую часть частоты  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \omega_{01} = Re\omega_1 = \alpha_1 K \quad \omega_{02} = Re\omega_2 = -\beta_H K = \beta_H^{(1)} K \\ \Gamma_1 = Im\omega_1 = \pm\alpha_2 K - K^2 \quad \Gamma_2 = Im\omega_2 = \pm\alpha_H K - Pm^{-1}K^2 \end{aligned} \quad (46)$$

Как видно из (46), крупномасштабные возмущения могут не только нарастать (затухать) со временем, но и совершать колебания с частотами  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$ . Коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\beta_H$  имеют смысл фазовой (групповой) скорости распространения вихревых и магнитных возмущений соответственно. В наиболее интересном физическом случае  $(\omega_G t_0) \approx c_s \approx (k_p \lambda_0)^{-1}$  и при  $k \approx 1$  эти коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\beta_H$  принимают самый простой вид:

$$\alpha_1 = \frac{f_0^2 D^2 c_s (7 - 2D^2)}{2 \left[ (1 + D^2)^2 + 9 \right]} \quad (47)$$

$$\beta_H = -f_0^2 \frac{D^2 Pm^2 c_s}{(Pm^2 + 1) \left[ (1 + D^2)^2 + 9 \right]} = -\beta_H^{(1)} \quad (48)$$

Решение с первым инкрементом  $\Gamma_1 > 0$  (см. Рис. 1) описывает генерацию крупномасштабных вихревых структур во вращающейся стратифицированной электропроводящей среде с коэффициентом усиления  $\alpha_2$  равным:

$$\alpha_2 = \frac{f_0^2 D c_s (5 - 7D^2)}{2 \left[ (1 + D^2)^2 + 9 \right]} = \frac{Hel}{2} \frac{5 - 7D^2}{(D^2 + 1)^2 + 9} \quad (49)$$

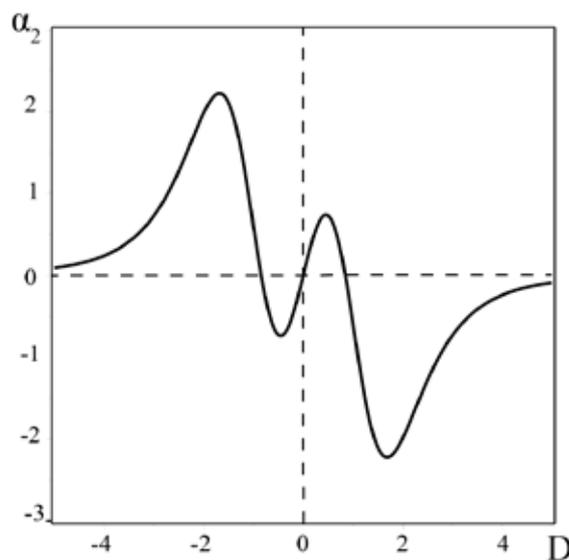


Рис. 2. График зависимости ГД  $\alpha$ -эффекта от вращения среды (параметра  $D$ ) при  $f_0 = 10$  и  $c_s = 1$

Величина коэффициента  $\alpha_2$  зависит от параметра вращения среды  $D$ , график зависимости которой изображен на Рис. 2. При увеличении эффекта вращения ( $D \rightarrow \infty$ ) мы наблюдаем стремление  $\alpha_2 \rightarrow 0$ , или подавление ГД  $\alpha$ -эффекта. Подобное явление было описано в работе [32]. Антисимметричная зависимость  $\alpha_2$  от параметра вращения  $D$  позволяет перенести сделанные выше выводы для области отрицательных значений проекций  $D$  в обратном порядке. Инкремент вихревой неустойчивости ( $\Gamma_1 > 0$ ) имеет вид известного из линейной теории динамо  $\alpha$ -эффекта (см. Рис. 1). Максимальное значение инкремент неустойчивости  $\Gamma_{1max} = \frac{\alpha_2^2}{4}$  достигает при  $K_{max} = \frac{\alpha_2}{2}$ .

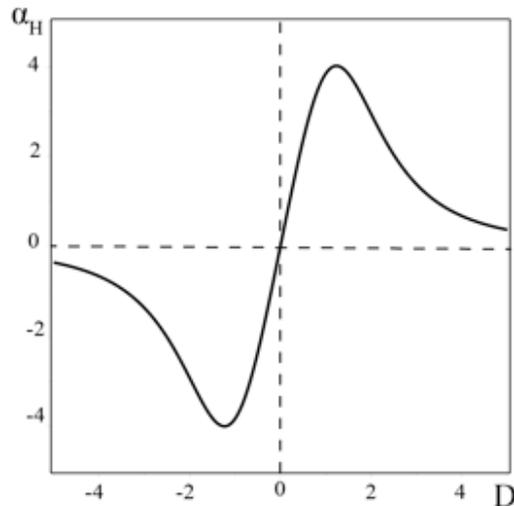


Рис. 3. График зависимости МГД  $\alpha$ -эффекта от вращения жидкости (параметра  $D$ ) для магнитных чисел Прандтля  $Pm = 1$  при  $f_0 = 10$  и  $c_s = 1$

Магнитогиродинамический  $\alpha$ -эффект (или  $\alpha_H$ -эффект) также увеличивается при «медленном» вращении до максимального значения  $\alpha_{Hmax}$ , после которого при увеличении параметра  $D$  наблюдается спад  $\alpha_H$  но знак коэффициента  $\alpha_H$  не изменяется. Это явление отчетливо прослеживается на Рис. 3 для магнитных чисел Прандтля  $Pm = 1$ . В случае произвольных значений  $Pm$  при «быстром» вращении жидкости мы также наблюдаем подавление  $\alpha_H$ -эффекта (см. Рис. 4). Область положительных значений второго инкремента  $\Gamma_2 > 0$  соответствует росту крупномасштабных возмущений магнитного поля с коэффициентом усиления  $\alpha_H$  равным:

$$\alpha_H = \frac{Hel}{2} \frac{Pm}{(1 + Pm^2)} \tag{50}$$

Максимальный инкремент  $\Gamma_{2max} = \frac{\alpha_H^2}{4} Pm$  достигает своего значения при волновых числах  $K_{max} = \frac{\alpha_H}{2}$  (см. Рис. 5).

Эффект генерации крупномасштабного магнитного поля мелкомасштабной спиральной турбулентностью в электропроводящих средах хорошо известен (см. например [1–7]) и носит название магнитогиродинамического (МГД)  $\alpha$ -эффекта или  $\alpha_H$ -эффекта. Полученные нами соотношения (49)-(50) указывают на существование двух  $\alpha$ -эффектов в электропроводящей среде с ненулевой спиральностью  $Hel \neq 0$  [25].

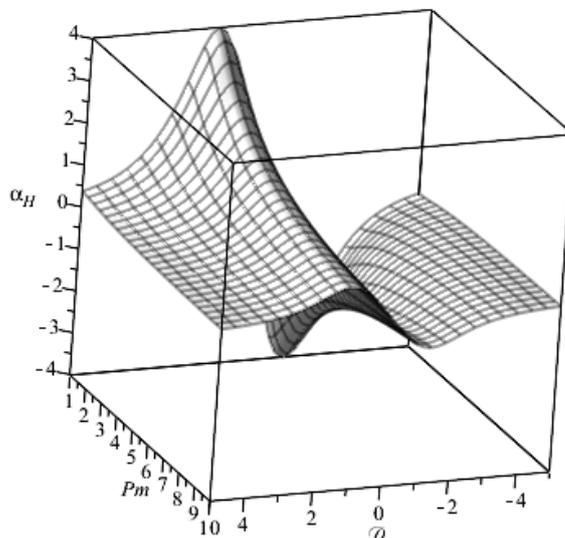


Рис. 4. Трехмерное изображение зависимости коэффициента  $\alpha_H$  от параметра вращения  $D$  и числа Прандтля  $Pm$

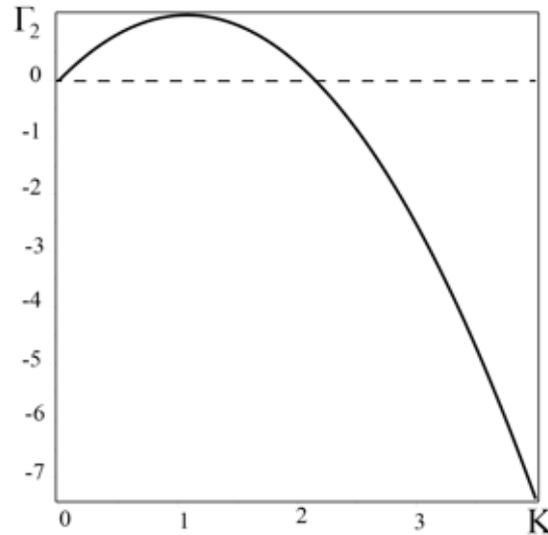


Рис. 5. График зависимости инкремента неустойчивости  $\Gamma_2$  от волновых чисел  $K$

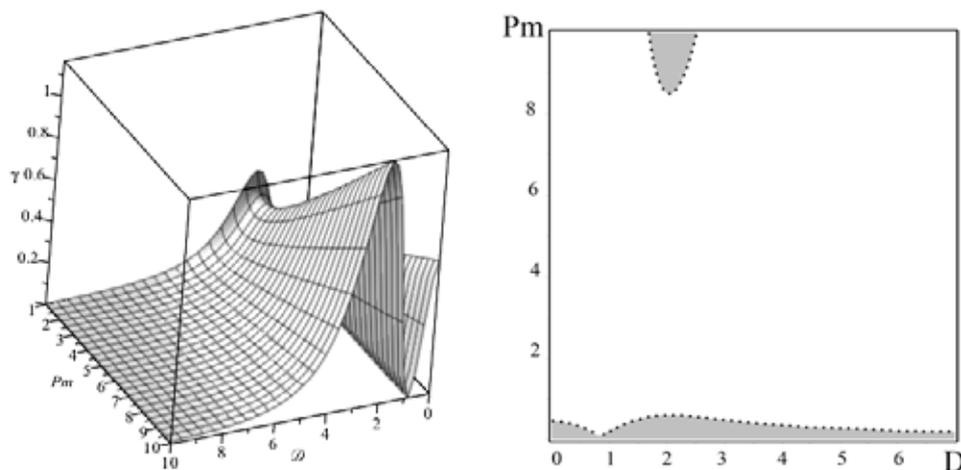


Рис. 6. Слева — трехмерное изображение зависимости коэффициента  $\gamma$  от параметра вращения  $D$  и магнитного числа Прандтля  $Pm$ , справа — на рисунке показаны области  $\gamma < 1$  (светлая часть) и  $\gamma > 1$  (темная часть) на плоскости  $(D, Pm)$

Для слабопроводящих сред ( $\sigma_c \rightarrow 0$ )  $\alpha_H$ -эффект мал, поэтому происходит генерация только крупномасштабных вихревых движений. Эта закономерность особенно видна на Рис. 6, где изображена зависимость отношения  $\gamma = \frac{\Gamma_{1max}}{\Gamma_{2max}}$

от параметров вращения  $D$  и магнитного числа Прандтля  $Pm$ :

$$\gamma = \frac{(5 - 7D^2)^2 (1 + Pm^2)^2}{4((1 + D^2)^2 + 9) Pm^3} \tag{51}$$

В правой части Рис. 6 на плоскости  $(D, Pm)$  показаны области превосходства максимального инкремента неустойчивости для вихревых возмущений  $\Gamma_{1max}$  над максимальным инкрементом неустойчивости для магнитных возмущений  $\Gamma_{2max}$  ( $\gamma > 1$ ) и наоборот ( $\gamma < 1$ ). На этом графике мы видим, что наибольшей области соответствует случай  $\gamma < 1$ , т. е. темпы роста магнитных возмущений выше чем вихревых возмущений. При фиксированных параметрах вращения  $D = 0.5$  и магнитных числах Прандтля  $Pm = 1$  из Рис. 5 видно, что  $\Gamma_2 > \Gamma_1$  на интервале волновых чисел  $K \in [0, 1]$ . Таким образом, в результате развития крупномасштабной неустойчивости рост магнитных возмущений опережает рост вихревых возмущений.

Перейдем теперь к общему случаю при наличии мелкомасштабных стационарных флуктуаций магнитных полей, уровень которых поддерживается источником мелкомасштабной МГД-турбулентности. Рассмотренный нами  $\alpha_H$ -эффект на линейной стадии возможен при наличии мелкомасштабного поля  $B_0$ , или так называемого в литературе [3] «затравочного» магнитного поля. В теории динамо, к настоящему времени, известно множество механизмов генерации «затравочных» магнитных полей, например, при термоэффекте [28], при развитии плазменных неустойчивостей [29–31] и т. д. Механизм возбуждения «затравочных» магнитных полей будем моделировать в виде внешнего источника, в результате действия которого возникают поля  $B_0$  со спиральностью равной нулю:  $\vec{B}_0 \text{rot} \vec{B}_0 = 0$ . Динамика крупномасштабных полей в этих условиях описывается самосогласованной системой уравнений (38)-(41), в которой видно взаимное влияние крупномасштабного магнитного поля на вихревое движение среды и наоборот. С учетом источника флуктуаций магнитного поля общее решение системы уравнений (38)-(41) можно представить в следующем виде:

$$W_{1,2} = (A_{W_{1,2}}) e^{\Gamma_B t} \exp(iKZ - i\omega_m T), \quad H_{1,2} = (A_{H_{1,2}}) e^{\Gamma_B t} \exp(iKZ - i\omega_m T) \tag{52}$$

В формуле (52) частота  $\omega_m$  с учетом внешнего источника ( $f_B \neq 0$ ) имеет вид:

$$\omega_m = -\tilde{\beta}_H K + i(\tilde{\alpha}_H K - Pm^{-1} K^2) \tag{53}$$

где  $\tilde{\beta}_H = \beta_H + \beta_B$ ,  $\tilde{\alpha}_H = \alpha_H + \alpha_B$ .

Величина  $\Gamma_B$  играет роль коэффициента усиления вихревых и магнитных возмущений, обусловленного действием внешнего источника  $f_B$ . Очевидно, что при  $f_B = 0$  решения (52) переходят в (44). Подставим решения (52) в систему уравнений (38)-(41), и проводя обычные вычисления, получим систему уравнений для амплитуд возмущений:

$$\begin{aligned} D_\alpha A_{W_1} e^{-i\omega_m t} - i\alpha_2 K A_{W_2} e^{-i\omega_m t} + iK \varepsilon_1 A_{H_1} e^{-i\omega_m t} - iK \varepsilon_2 A_{H_2} e^{-i\omega_m t} &= 0 \\ D_\alpha A_{W_2} e^{-i\omega_m t} + i\alpha_2 K A_{W_1} e^{-i\omega_m t} + iK \varepsilon_2 A_{H_1} e^{-i\omega_m t} + iK \varepsilon_1 A_{H_2} e^{-i\omega_m t} &= 0 \\ D_\beta A_{H_1} e^{-i\omega_m t} - i\tilde{\alpha}_H K A_{H_2} e^{-i\omega_m t} - iK \alpha_W A_{W_2} e^{-i\omega_m t} &= 0 \\ D_\beta A_{H_2} e^{-i\omega_m t} + i\tilde{\alpha}_H K A_{H_1} e^{-i\omega_m t} + iK \alpha_W A_{W_1} e^{-i\omega_m t} &= 0 \end{aligned} \tag{54}$$

Условием разрешимости для системы уравнений (54) является равенство нулю детерминанта, после раскрытия которого получим дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} (D_\beta^2 - \tilde{\alpha}_H^2 K^2)(D_\alpha^2 - \alpha_2^2 K^2) + 2i\alpha_W \varepsilon_1 (\tilde{\alpha}_H D_\alpha + \alpha_2 D_\beta) K^3 - \\ - 2K^2 \varepsilon_2 \alpha_W (D_\alpha D_\beta + \alpha_2 \tilde{\alpha}_H K^2) + \alpha_W^2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) K^4 = 0 \end{aligned} \tag{55}$$

где введены следующие обозначения:

$$D_\alpha = \Gamma_B + \alpha_2 K, \quad D_\beta = \Gamma_B + \tilde{\alpha}_H K, \quad \varepsilon_1 = \beta_1 + \gamma_1, \quad \varepsilon_2 = \beta_2 + \gamma_2 - \tilde{Q}\beta_B \tag{56}$$

Входящие в формулы (54)-(56) новые коэффициенты  $\alpha_B, \beta_B, \alpha_W, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  появляются в результате действия внешнего источника МГД турбулентности ( $f_B \neq 0$ ), и при выполнении условия  $(\omega_G t_0) \approx c_s \approx (k_\rho \lambda_0)^{-1}$  и  $k \approx 1$  они имеют следующий вид:

$$\alpha_B = \frac{f_B^2}{2} \frac{DQc_s(1+D^2-3Pm)}{(1+Pm^2)((1+D^2)^2+9)} \tag{57}$$

$$\beta_B = \frac{f_B^2}{2} \frac{Qc_s(1+D^2+3)Pm}{(1+Pm^2)((1+D^2)^2+9)} \tag{58}$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{f_0 f_B}{2} \frac{D^2 Qc_s Pm}{(1+Pm^2)((1+D^2)^2+9)} \tag{59}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{f_0 f_B}{2} \frac{DQc_s \left( 2Pm - 1 + Pm \frac{D^2}{2} \right)}{(1+Pm^2)((1+D^2)^2+9)} \tag{60}$$

$$\alpha_w = -\frac{f_0 f_B}{2} \frac{Dc_s Pm}{(1+Pm^2)((1+D^2)^2+9)} \left\{ \frac{3Pm(1-Pm^2)-2Pm^2(1+D^2)}{1+Pm^2} + \frac{2(D^2-1)((1+D^2)^2-9)+6(1+D^2)(D^2-3)}{(1+D^2)^2+9} - \frac{Pm((1+D^2)^2-9)(D^2-3)}{(1+D^2)^2+9} + \frac{12Pm(D^4-1)}{(1+D^2)^2+9} \right\} \quad (61)$$

Дисперсионное уравнение (55), после несложных алгебраических преобразований, можно записать в другом более удобном виде:

$$\left[ iK(\tilde{\alpha}_H D_\alpha + \alpha_2 D_\beta) + \varepsilon_1 \alpha_w K^2 \right]^2 = -\left[ D_\alpha D_\beta + \alpha_2 \tilde{\alpha}_H K^2 - \varepsilon_2 \alpha_w K^2 \right]^2 \quad (62)$$

Извлекая квадратный корень с обеих сторон уравнения (62), оно распадается на два уравнения:

$$iK(\tilde{\alpha}_H D_\alpha + \alpha_2 D_\beta) + \varepsilon_1 \alpha_w K^2 = i(D_\alpha D_\beta + \alpha_2 \tilde{\alpha}_H K^2 - \varepsilon_2 \alpha_w K^2) \quad (63)$$

$$iK(\tilde{\alpha}_H D_\alpha + \alpha_2 D_\beta) + \varepsilon_1 \alpha_w K^2 = -i(D_\alpha D_\beta + \alpha_2 \tilde{\alpha}_H K^2 - \varepsilon_2 \alpha_w K^2) \quad (64)$$

Рассмотрим уравнение (63), которое после умножения левой и правой частей на  $i$  сводится к уравнению для  $\Gamma_B$ :

$$\Gamma_B^2 = \alpha_w K^2 (\varepsilon_2 - i\varepsilon_1) \quad (65)$$

Из (65) видно, что коэффициент  $\Gamma_B$  комплексная величина и может быть представлен как

$$\Gamma_B = \gamma_R + i\gamma_I \quad (66)$$

где  $\gamma_R$  – действительная часть  $\Gamma_B$ :  $\gamma_R = \text{Re}\Gamma_B$  – дает вклад в инкремент крупномасштабной неустойчивости,  $\gamma_I = \text{Im}\Gamma_B$  – мнимая часть  $\Gamma_B$  дает вклад в частоту колебаний крупномасштабных возмущений. Подставляя (66) в (65) получим систему уравнений для  $\gamma_R$  и  $\gamma_I$ :

$$\begin{cases} \gamma_R^2 - \gamma_I^2 - \alpha_w \varepsilon_2 K^2 = 0 \\ 2\gamma_R \gamma_I + \alpha_w \varepsilon_1 K^2 = 0 \end{cases} \quad (67)$$

Отсюда легко найти значения  $\gamma_R$  и  $\gamma_I$ :

$$\gamma_R^{(+)} = \pm i \sqrt{\frac{\alpha_w}{2}} K \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{(+)}} , \quad \gamma_R^{(-)} = \mp \sqrt{\frac{\alpha_w}{2}} K \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{(-)}} , \quad \gamma_I^{(+)} = \pm i \sqrt{\frac{\alpha_w}{2}} K \varepsilon_{(+)} , \quad \gamma_I^{(-)} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_w}{2}} K \varepsilon_{(-)} \quad (68)$$

Здесь введены обозначения:  $\varepsilon_{(-)} = \sqrt{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} - \varepsilon_2}$  ,  $\varepsilon_{(+)} = \sqrt{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} + \varepsilon_2}$  .

Используя определение (66) находим общие выражения для коэффициента  $\Gamma_B$ :

$$\Gamma_B^{(+)} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_w}{2}} K \left( \frac{i\varepsilon_1}{\sqrt{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} + \varepsilon_2}} - \sqrt{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} + \varepsilon_2} \right) \quad (69)$$

$$\Gamma_B^{(-)} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_w}{2}} K \left( i\sqrt{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} - \varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} - \varepsilon_2}} \right) \quad (70)$$

Согласно формуле (69) положительная часть  $\text{Re}\Gamma_B^{(+)} > 0$  дает вклад в инкремент крупномасштабной неустойчивости:

$$\delta\Gamma_B^{(+)} = \sqrt{\frac{\alpha_w}{2}} K \sqrt{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} + \varepsilon_2} > 0 \quad (71)$$

а мнимая часть  $\text{Im}\Gamma_B^{(+)}$  дополнительную поправку к частоте колебаний:

$$\delta\omega_0^{(+)} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_w}{2}} K \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} + \varepsilon_2}} \quad (72)$$

Аналогично находятся вклады в инкремент и частоту колебаний из решения (70):

$$\delta\Gamma_B^{(-)} = \sqrt{\frac{\alpha_w}{2}} K \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} - \varepsilon_2}} > 0 \quad (73)$$

$$\delta\omega_0^{(-)} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_W}{2}} K \sqrt{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} - \varepsilon_2} \tag{74}$$

Таким образом, учет источника мелкомасштабного магнитного поля приводит к перенормировке коэффициентов усиления и частот колебаний для ГД и МГД  $\alpha$  - эффектов:

$$\omega_{01}^{(\pm)} = (\alpha_1 \pm q^{(\pm)}) K \quad \omega_{02}^{(\pm)} = -(\tilde{\beta}_H \pm q^{(\pm)}) K \tag{75}$$

$$\Gamma_1^{(\pm)} = (\alpha_2 \pm q^{(\pm)}) K - K^2 \quad \Gamma_2^{(\pm)} = (\tilde{\alpha}_H \pm q^{(\pm)}) K - Pm^{-1} K^2 \tag{76}$$

где  $q^{(+)} = \sqrt{\frac{\alpha_W}{2}} \sqrt{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} + \varepsilon_2}$ ,  $q^{(-)} = \sqrt{\frac{\alpha_W}{2}} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} - \varepsilon_2}}$

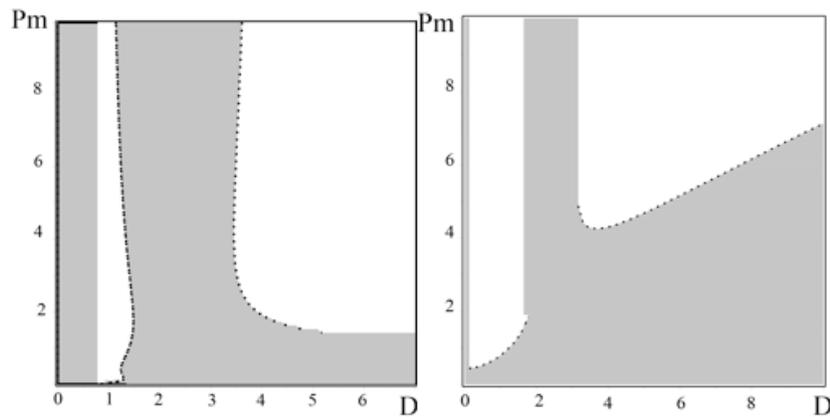


Рис. 7. Слева — светлая часть рисунка соответствует области неустойчивости вихревых возмущений, а справа — темная часть рисунка соответствует области неустойчивости магнитных возмущений при включенном источнике турбулентности  $f_0 = f_B = 10$  и параметрах  $Q = 2$ ,  $c_s = 1$

Максимальные значения инкрементов соответственно принимают вид:

$$\Gamma_{1max} = \frac{(\alpha_2 + q^{(\pm)})^2}{4} \text{ при } K_{max} = \frac{\alpha_2 + q^{(\pm)}}{2} \tag{77}$$

$$\Gamma_{2max} = \frac{(\tilde{\alpha}_H + q^{(\pm)})^2}{4} Pm \text{ при } K_{max} = \frac{(\tilde{\alpha}_H + q^{(\pm)})}{2} Pm \tag{78}$$

Нетрудно заметить, что в полученные здесь добавки  $q^{(\pm)}$  входят коэффициенты  $\alpha_W, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  посредством которых осуществляется влияние вихревых движений на магнитные поля и наоборот. Включение источника мелкомасштабного магнитного поля  $f_B$ , как видно из выражений (77)-(78), приводит к перестройке порога неустойчивости. При помощи численных методов мы можем определить области неустойчивости для вихревых и магнитных возмущений. Для вихревых возмущений эта область изображена на Рис. 7 в плоскости  $(D, Pm)$  для фиксированных значений  $Q = 2$ ,  $c_s = 1$  и амплитуд безразмерных внешних источников равных десяти:  $f_0 = f_B = 10$ . Аналогичным образом определяются области неустойчивости для магнитных возмущений, которые изображены также на Рис.7.

**Заключение**

В заключении приведем количественные оценки характерных масштабов и времен крупномасштабной неустойчивости на примере галактической среды. Начнем анализ оценок масштабов для неустойчивости типа гидродинамического  $\alpha$  - эффекта. Выше мы получили максимальное значение для инкремента неустойчивости вихревых возмущений  $\Gamma_{1max} \sim \alpha_2^2$  и соответственно — характерный масштаб неустойчивой моды  $L_{1max} \sim 1/\alpha_2$  и характерный временной масштаб ее нарастания  $T_{1max} \sim 1/\Gamma_{1max}$ . Очевидно, что для нахождения этих масштабов нужно оценить коэффициент  $\alpha_2$ . Из теории динамо [1–7] известно определение гидродинамической спиральности  $\alpha_v \cong \frac{t_0}{3} \overline{\vec{v}_0 \text{rot} \vec{v}_0}$ , которую выразим через безразмерную амплитуду источника:

$$\alpha_v \approx \frac{t_0 v_0^2}{3 \lambda_0} f_0^2$$

здесь  $f_0$  — безразмерная амплитуда силы, входящая в формулы (49)-(50). При выводе этой формулы мы полагали установление баланса между источником и диссипацией в стационарном случае. Далее из формулы (49) коэффициент усиления  $\alpha_2$  при малых числах параметра вращения  $D < 1$  (для центральной части нашей Галактики  $D \cong 0.18 \div 0.5$ ) принимает вид:

$$\alpha_2 \approx \frac{D}{40} f_0^2 \approx \frac{3}{40} \frac{\alpha_v D}{v_0 R}$$

Для оценок часто полагают  $\alpha_v \approx v_0$  (см. например [6]), и в итоге характерные пространственный и временной масштабы соответственно равны:

$$L_{1max} \approx \frac{20}{3} \frac{v_0}{\Omega_0}, T_{1max} \approx \left(\frac{20}{3}\right)^2 \frac{v_0}{\Omega_0^2 \lambda_0}$$

Используя экспериментальные данные для нашей Галактики:  $\Omega_0 \approx 10^{-16} c^{-1}$  (центральная часть Галактики),  $v_0 \approx 10 \text{ км/с}$ ,  $\lambda_0 \approx 100 \text{ пс}$  ( $1 \text{ пс} = 3 \cdot 10^{16} \text{ м}$ ),  $\nu \approx 10^{26} \text{ см}^2 / \text{с}$  [6] легко найти численные оценки  $L_{1max}$  и  $T_{1max}$ :  $L_{1max} \sim 20 \text{ кпк}$ ,  $T_{1max} \sim 5 \cdot 10^{11} \text{ лет}$ . Это вполне приемлемые оценки характерных масштабов для галактической генерации крупномасштабной вихревой структуры спирального типа. Проводя аналогичные рассуждения можно вычислить характерные пространственные  $L_{2max}$  и временные масштабы  $T_{2max}$  для крупномасштабной неустойчивости МГД  $\alpha$ -эффекта:

$$L_{2max} \approx \frac{40}{3} \frac{\Omega_0 v_0}{\nu^2} \lambda_0^4, T_{2max} \approx \left(\frac{10}{3}\right)^2 \frac{\nu}{\Omega_0^2 \lambda_0^2}$$

Численные оценки  $L_{2max} \sim 0.3 \text{ кпк}$  и  $T_{2max} \sim 0.4 \cdot 10^{11} \text{ лет}$  показывают, что в галактической среде, в результате развития данной неустойчивости, крупномасштабное магнитное поле генерируется быстрее  $T_{1max} / T_{2max} \gg 1$  и имеет меньший характерный масштаб  $L_{1max} / L_{2max}$ , чем крупномасштабная вихревая структура. Заметим, что проделанные здесь оценки для характерных масштабов крупномасштабной неустойчивости справедливы при выполнении условия  $(\omega_G t_0) \approx c_s \approx (k_\rho \lambda_0)^{-1}$ , т. е. когда характерный масштаб турбулентности  $\lambda_0$  и стратификации  $L_\rho$  примерно равны:  $\lambda_0 \approx L_\rho = 100 \text{ пк}$ , а характерный временной масштаб турбулентности:

$$t_0 = \frac{\lambda_0^2}{\nu} = \omega_G^{-1} \approx 0.9 \cdot 10^{15} \text{ с}$$

Зная определение джинсовой частоты  $\omega_G$  можно оценить плотность галактической среды:  $\rho_{00} \approx 10^{-24} \text{ г/см}^3$ . Это типичная плотность для галактических дисков [6, 27].

Применяя асимптотический метод многих масштабов, получены условия возникновения крупномасштабной неустойчивости во вращающейся стратифицированной самогравитирующей электропроводящей среде при наличии внешней мелкомасштабной силы с нулевой спиральностью и малым числом Рейнольдса. Это условие позволило использовать число Рейнольдса в качестве малого параметра асимптотического разложения. В нулевом порядке теории возмущений показана возможность генерации спиральности мелкомасштабного поля скорости (или спиральной турбулентности) во вращающейся стратифицированной самогравитирующей электропроводящей среде в результате действия внешней неспиральной силы [25]. Именно этот факт приводит к возникновению крупномасштабной неустойчивости типа  $\alpha$ -эффекта, вследствие которого происходит генерация крупномасштабных вихревых и магнитных возмущений. Причем темпы роста магнитных возмущений выше, чем у вихревых. Мелкомасштабные пульсации магнитного поля, возбуждаемые стационарным источником с нулевой спиральностью, оказывают влияние на эволюцию крупномасштабных возмущений. В этом случае меняется порог крупномасштабных неустойчивостей и на Рис. 7 показаны области где проявляется гидродинамический и магниогидродинамический  $\alpha$ -эффекты. С ростом амплитуды эти неустойчивости выходят на нелинейную стадию и формируют стационарные крупномасштабные структуры. Исследование этих вопросов можно провести также с использованием метода многих масштабов [16].

Литература:

1. Штеенбек, М., Краузе Ф. Возникновение магнитных полей звезд и планет в результате турбулентного движения их веществ. // Магнитная гидродинамика. 1967. № 3. с. 19–44.
2. Моффат, Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир. 1980. 343 с.

3. Зельдович, Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике. Инст. комп. иссл. РХД.: Ижевск. 2006. 384 с.
4. Паркер, Ю. Беседы об электрических и магнитных полях в космосе. Инст. комп. иссл. РХД.: Ижевск. 2010. 208 с.
5. Краузе, Ф., Рэдлер К. — Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир. 1984. 314 с.
6. Рузмайкин, А.А., Соколов Д.Д., Шукуров А.М. Магнитные поля галактик. М.: Наука. 1988. 279 с.
7. Соколов, Д.Д., Степанов Р.А., Фрик П.Г. Динамо на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту. // УФН. 2014. Т. 184. с. 318–335.
8. Моисеев, С.С., Оганян К.Р., Руткевич П.Б., Тур А.В., Хоменко Г.А., Яновский В.В. Вихревое динамо в спиральной турбулентности. В сб.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Наук. Думка: Киев. 1990. с. 280–382.
9. Моффат, Г. Некоторые направления развития турбулентности. Соврем. гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир. 1984. с. 48–76.
10. Krause, F., Rudiger G. On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. I. Incompressible homogeneous isotropic turbulence. // Astron. Nachr. 1974. V. 295. P. 93–99.
11. Моисеев, С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Хоменко Г.А., Яновский В.В. Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности. // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. с. 1979–1987.
12. Петросян, А.С. Дополнительные главы теории турбулентности. Спиральная турбулентность. Москва: ИКИ РАН. 2013. 60 с.
13. Moiseev, S. S., Rutkevitch P. B., Tur A. V., Yanovsky V. V. Vortex dynamos in a helical turbulent convection. // Sov. Phys. JETP. 1988. V. 67. P. 294–303.
14. Новиков, Е.А. Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. Вып. 5 (11). С.1919–1926.
15. Кляцкин, В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука. 1980. 337 с.
16. Frishe, U., She Z. S., Sulem P. L. Large Scale Flow Driven by the Anisotropic Kinetic Alpha Effect. // Physica D. 1987. V. 28. P. 382.
17. Дружинин, О.А., Хоменко Г.А. Нелинейная теория гидродинамического альфа-эффекта в сжимаемой среде и обратный каскад энергии. В тр. Межд. конф.: Нелинейные и турбулентные процессы в физике. Киев: Наук. думка. 1982. Т. 2. с. 83–86.
18. Rutkevitch, P. B., Sagdeev R. Z., Tur A. V., Yanovsky V. V. Nonlinear dynamic theory of the  $\alpha$ -effect in compressible fluid. Proceeding of the IV Intern. Workshop on Nonlinear and Turb. Pros. in Physics. Kiev. 1989. V. 2. P. 172–175.
19. Tur, A. V., Yanovsky V. V. Large-scale instability in hydrodynamics with stable temperature stratification driven by small-scale helical force. ArXiv:1204.5024 V.1 [physics. Flu-dyn.](2012).
20. Tur, A. V., Yanovsky V. V. Non Linear Vortex Structure in Stratified Driven by Small-scale Helical Forse. // Open Journal of Fluid Dynamics. 2013. V. 3. P. 64–74.
21. Копп, М.И., Тур А.В., Яновский В.В. Крупномасштабная конвективная неустойчивость в электропроводящей среде с мелкомасштабной спиральной турбулентностью. // ЖЭТФ. 2015.Т. 147. с. 846–866.
22. Копп, М., Тур А., Yanovsky V. The Large Scale Instability in Rotating Fluid with Small Scale Force // Open Journal of Fluid Dynamics. 2015. V. 5. P. 128–138.
23. Копп, М., Тур А., Yanovsky V. Nonlinear Vortex Structures in Obliquely Rotating Fluid. // Open Journal of Fluid Dynamics. 2015. V. 5. P. 311–321.
24. Копп, М.И. Крупномасштабное магнитовращательное динамо. I. Линейная теория без внешнего магнитного поля // Альманах современной науки и образования. 2016. № 4 (106). с. 59–73.
25. Копп, М.И. Генерация крупномасштабных вихревых структур во вращающейся самогравитирующей среде с мелкомасштабной неспиральной силой // Молодой ученый. 2016. № 11 (115). с. 101–110.
26. Чхетиани, О.Г. Самоорганизация и турбулентность в отражательно-несимметричных плазменно-гидродинамических средах. Дисс. на соиск. уч. степени докт. физ. — мат. наук. Москва. 1999. 262 с.
27. Рольфс, К. Лекции по теории волн плотности. М.: Мир. 1980. 205 с.
28. Долгинов, А.З., Урпин В.А. Термомагнитная неустойчивость неоднородной плазмы. // ЖЭТФ. 1978. Т. 77. с. 1921–1932.
29. Вайнштейн, С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А. Турбулентное динамо в астрофизике. М.: Наука. 1980. 354 с.
30. Вайнштейн, С.И. Магнитные поля в космосе. М.: Наука. 1983. 237 с.
31. Montgomery, D., Chen H. Turbulent amplification of large-scale magnetic fields. // Plasma Physics and Controlled Fusion. 1984. V. 26. № 10. P. 1199–1210.
32. Rudiger, G. On the  $\alpha$ -Effect for Slow and Fast Rotation. // Astron. Nachr. 1978. V.299. № 4. P. 217–222.

## Методы подавления счетного шума при решении задач физики плазмы методами частиц

Ма-ю-шан Владислав Витальевич, студент;  
Еременко Владимир Романович, студент  
Санкт-Петербургский государственный университет

*В данной работе рассматривается решение самосогласованной задачи моделирования интенсивного потока заряженных частиц в плоском диоде итерационным методом с моделью трубок тока и методом частиц в ячейках. Изучается влияние методов подавления счетного шума, а также способа создания начального распределения модельных частиц на решения, получаемые при решении стационарной самосогласованной задачи на примере плоского диода.*

**Ключевые слова:** метод частиц в ячейках, итерационный метод с моделью трубок тока, подавление шума, самосогласованная задача о плоском диоде

**В**ведение. Наиболее широко используемым инструментом изучения плазмы и динамики потоков заряженных частиц в эмитирующих установках является метод частиц в ячейках [7,9]. Идея метода заключается в том, что плазма представляется как набор большого количества взаимодействующих частиц. Расчетная область разбивается сеткой, в узлах которой хранится информация об электромагнитном поле, плотности тока и заряда. Метод частиц в ячейках естественным образом моделирует процесс движения частиц, учитывая их собственное влияние друг на друга через сеточные величины. Однако для моделирования стационарного состояния пучка более экономичным является итерационный метод с моделью трубок тока [1,3], основанный на итерационном повторении процесса расчета лишь для одного поколения частиц, что позволяет заметно сократить время решения задачи.

Одним из главных недостатков методов частиц является возникновение счетных «нефизических» шумов [8], приводящих к искажению решения. Основной причиной их возникновения является дискретная природа самих методов (представление среды в виде конечного числа частиц). Самым простым способом уменьшения численных шумов является увеличение числа модельных частиц, что ведет к резкому увеличению требуемых вычислительных ресурсов. Для уменьшения счетных шумов [2] изменяют схему раздачи заряда частиц, подбирают оптимальные временной шаг и размер ячейки расчетной сетки. Начальное распределение частиц также играет немаловажную роль. Наиболее распространенными подходами распределения частиц являются схемы тихого и случайного старта. Принцип случайного старта заключается в случайном распределении частиц в фазовом пространстве. Использование схемы «тихого» старта обеспечивает снижение шума и неопределенности случайного старта. Область эмиссии покрывается набором частиц так, чтобы воспроизвести необходимое распределение. Однако широкого распространения схема «тихий старт» не получила [7] по следующим причинам: подход требует большего количества модельных частиц (особенно, в случае начальной дискретизации по множеству измерений), также использование регулярно расположенного множества частиц может привести к появлению «нефизических» корреляций среди частиц.

**Постановка задачи.** Пусть  $\bar{\Omega} = \Omega \cap \Gamma$  — двумерная расчетная область, где  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  — граница расчетной области. Вычисление потенциала и напряженности электрического поля для стационарного потока заряженных частиц сводится к решению уравнения Пуассона

$$\Delta U(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}, \text{ при } \mathbf{r} \in \Omega$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}(U)$$

$$U(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \text{ при } \mathbf{r} \in \Gamma_1$$

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \text{ при } \mathbf{r} \in \Gamma_2 \tag{1}$$

В (1)  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $U$  — потенциал электрического поля,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{r}$  — вектор фазовых координат,  $\rho(\mathbf{r})$  — распределение плотности заряда,  $g(\mathbf{r})$  — функция, описывающая потенциал на электродах,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\mathbf{n}$  — нормаль к границе  $\Gamma_2$

Предполагается, что задача имеет стационарное решение, тогда выполняется уравнения неразрывности плотности тока

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_{\text{em}}(\mathbf{r}), \text{ при } \mathbf{r} \in \Gamma_{\text{em}} \quad (2)$$

Плотность тока эмиссии в задаче считается постоянной и определяется из закона Чайлда [4]

$$\mathbf{j}_{\text{em}} = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{2} \frac{e}{m} \frac{U^2}{d^2} \quad (3)$$

В (3)  $e$  и  $m$  — заряд и масса частицы,  $d$  — расстояние между катодом и анодом,  $U$  — напряжение на аноде. Движение заряженной частицы в релятивистском случае описывается следующими уравнениями

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{d\tau} = \frac{q_i \mathbf{E}(r_i)}{m_0 c^2}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{d\tau} = \frac{\mathbf{p}_i}{\gamma_i} \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{p}_i$  — приведенные импульсы частиц,  $\gamma_i$  — приведенная энергия частицы,  $q_i$  — заряды частиц,  $\mathbf{v}_i$  — скорости частиц,  $m_0$  — масса частиц,  $\mathbf{r}_i$  — положения частиц,  $i$  — номер частицы.

Требуется найти решение уравнения движения частиц (4) с учетом (1)-(3), определить распределение электростатического поля и траектории частиц.

**Метод частиц в ячейках.** Метод [7,9] относится к группе методов «частица-сетка» [5] и объединяет в себе эйлеров и лагранжевы подходы моделирования. Движение частиц в методе описывается подвижной лагранжевой сеткой, при этом плотность распределения пространственного заряда и значения электрических полей определены на неподвижной эйлеровой сетке.

Временной шаг метода частиц в ячейках состоит из четырех основных этапов. На первом этапе происходит инжекция новых частиц в расчетную область. На втором этапе происходит расчет движения частиц в электромагнитных полях и раздача плотности заряда, создаваемой частицами, в узлы расчетной сетки. На третьем этапе решаются уравнения поля, определяется новая конфигурация электромагнитных полей. На последнем этапе происходит интерполяция сил, действующих на частицу. На следующем временном шаге все этапы повторяются.

**Итерационный метод с моделью трубок тока.** В отличие от метода частиц в ячейках, итерационный метод [1,3] используется только для моделирования стационарных потоков заряженных частиц. Метод состоит из следующих этапов. Сперва происходит инжекция частиц в расчетную область. Затем рассчитываются полные траектории частиц под действием электромагнитных полей, рассчитанных на предыдущей итерации. На каждом временном шаге плотность заряда от частиц накапливается в узлах расчетной сетки. После того как все частицы покинут расчетную область, рассчитывается новая конфигурация электромагнитных полей. Процедура повторяется до сходимости к стационарному решению. Требуемое число модельных частиц при расчете итерационным методом значительно меньше по сравнению с методом частиц в ячейках, что делает его более эффективным способом изучения стационарного состояния пучка.

#### Сглаживание пространственного заряда

**Линейные сглаживающие фильтры.** Простейшим способом сглаживания является применение линейных сглаживающих фильтров. Их суть заключается в усреднении значений элементов по их окрестности. Для вычисления значения используется матрица, называемая ядром свертки, содержащая весовые коэффициенты. В данной работе ядро свертки заполняется по закону нормального распределения.

**Частотная фильтрация.** Фильтрация в частотной области [6,10] основана на применении к пространственному заряду преобразования Фурье и состоит из следующих этапов:

Прямое двумерное преобразование Фурье для получения спектра пространственного заряда

Центрирование Фурье образа и его умножение на частотную функцию фильтра

Обратное двумерное преобразование Фурье

**Сглаживающий кубический сплайн.** Сглаживающий сплайн  $s(x)$  определяется как сплайн, минимизирующий следующий функционал:

$$I(s, p) = p \sum_{k=1}^n w_k (y_k - s(x_k))^2 + (1-p) \int_{x_1}^{x_n} \left( \frac{d^2 s(x)}{dx^2} \right) dx \quad (5)$$

где  $(x_k, y_k)$  — приближаемые данные,  $w_k$  — веса данных,  $p$  — сглаживающий параметр. При  $p=1$  сглаживающий сплайн превращается в обычный кубический сплайн, при  $p=0$  данные аппроксимируются в смысле метода наименьших квадратов.

**Результаты.** Рассмотрим задачу моделирования плоского диода в случае двумерной декартовой геометрии. Значения основных параметров диода приведены в таблице 1. Расчеты проводились на сетке размерностью  $128 \times 128$ .

Таблица 1. Параметры тестового диода

Расстояние от катода до анода, м	$d = 0.1$
Длина, м	$L = 0.1$
Длина эмиттера, м	$L_{em} = 0.02$
Напряжение на аноде, В	$U_a = 100\ 000$
Плотность тока эмиссии, А/м	$J_{em} = 7368$

**Тихий старт. Сравнение методов.** При начальном распределении электронов по схеме тихого старта итерационный метод показал хорошую сходимость. Была проведена серия расчетов при  $\varepsilon = 10^{-10}$ , количество модельных частиц — 500. В качестве критерия останова итерационного процесса использовался

$$\max_{s=1..N} \left| \frac{\rho_s^n - \rho_s^{n-1}}{\rho_s^{n-1}} \right| < \varepsilon \tag{6}$$

где  $N$  — количество узлов сетки,  $\varepsilon$  — наперед заданная точность.

Результаты расчета с помощью метода частиц в ячейках и итерационного метода достаточно точно согласуются (рис. 1). Однако, так как метод частиц в ячейках требует пересчет электрических полей на каждом временном шаге, расчет с помощью итерационного метода происходит значительно быстрее.

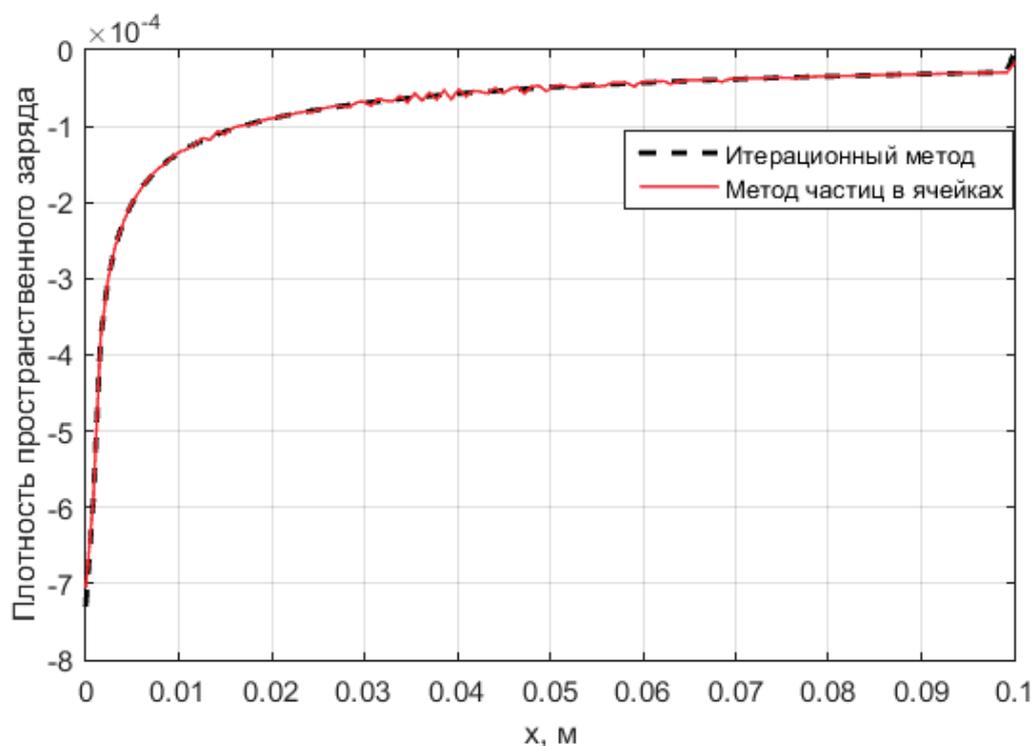


Рис. 1. Распределение плотности пространственного заряда в середине диода

**Случайный старт. Случай итерационного метода.** Использование схемы случайного старта приводит к появлению больших осцилляций в распределении плотности пространственного заряда. В случае итерационного метода сходимости по критерию (6) добиться не удалось, сглаживание пространственного заряда также не помогло добиться сходимости (рис.2).

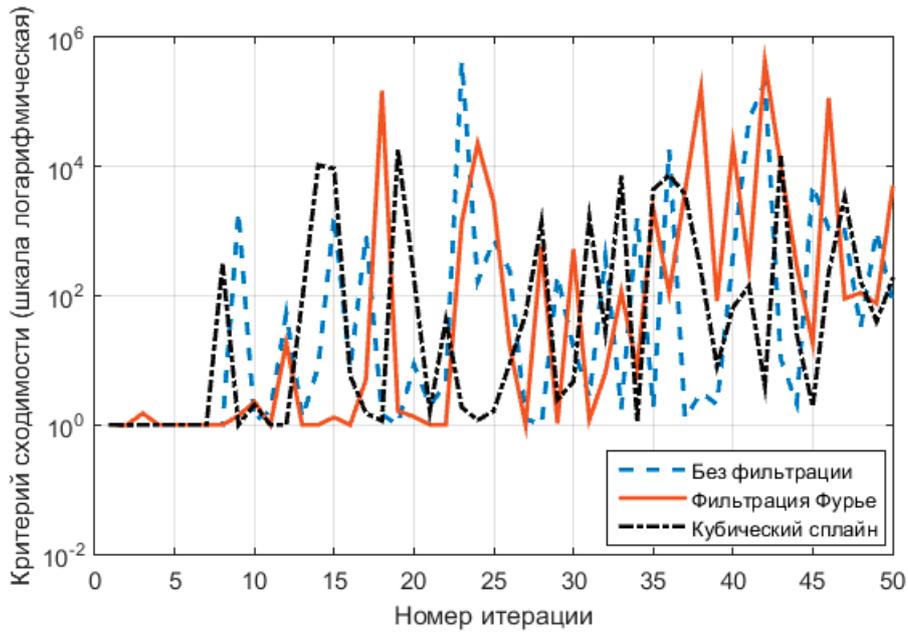


Рис. 2. Большие осцилляции в плотности пространственного заряда приводят к расходимости итерационного метода

**Случайный старт. Случай метода частиц в ячейках.** Рассмотрим теперь влияние случайного старта при расчетах методом частиц в ячейках. Исследуем также эффективность сглаживания пространственной плотности заряда в методе частиц в ячейках. Для оценки точности расчетов будем использовать решение итерационного метода, полученное со схемой «тихий старт» как эталонное.

На рис. 3 представлено сравнение отклонений распределений пространственного заряда со сглаживанием кубическими сплайнами и без от эталонного решения. На рис. 4 произведено сравнение эффективности алгоритмов сглаживания, результаты представлены как величина среднего отклонения от эталонного значения.

Таким образом, применение сглаживания к пространственной плотности заряда при расчете методом частиц в ячейках, позволяет заметно уменьшить осцилляции, вносимые случайным стартом, тем самым улучшив результаты расчета.

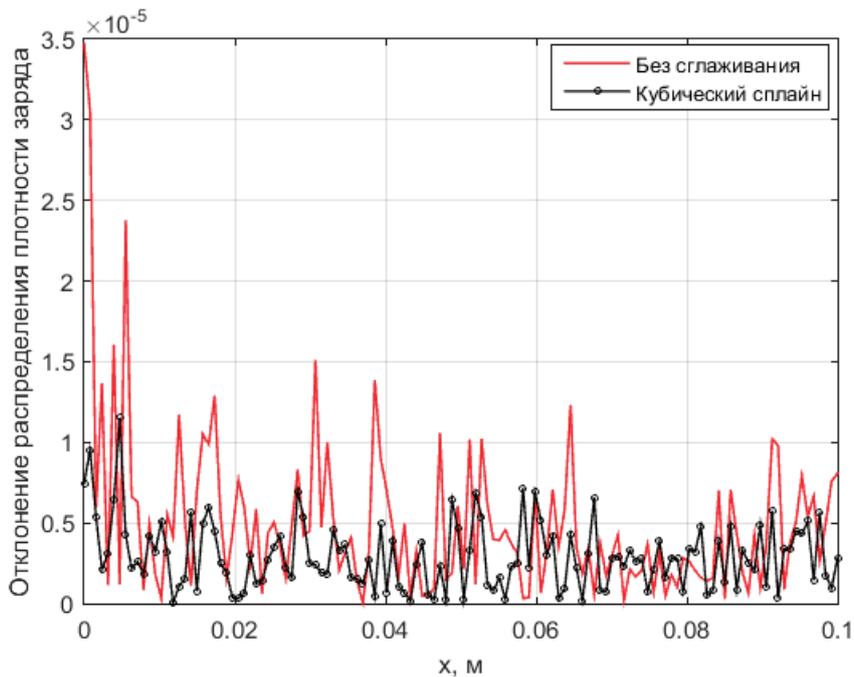


Рис. 3. Отклонение распределения плотности заряда со сглаживанием кубическими сплайнами  $s=0.5$  и без от эталонного решения, полученного итерационным методом

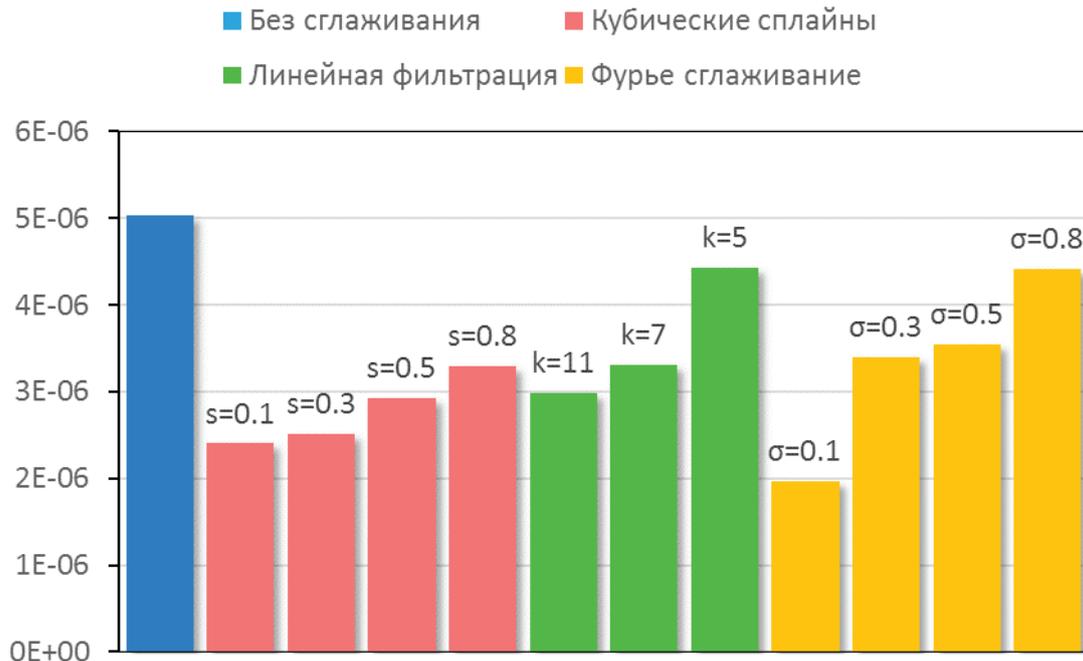


Рис. 4. Сравнение эффективности алгоритмов сглаживания

На диаграмме представлено сравнение среднего отклонения пространственного заряда от эталонного значения, рассчитанного итерационным методом с тихим стартом.

Примечание: где  $s$  — сглаживающий параметр кубических сплайнов,  
 $k$  — размер ядра свертки линейного сглаживания,  
 $\sigma$  — параметр оконной функции Гаусса при сглаживании.

**Заключение.** Итерационный метод с моделью трубок тока является более экономичным и эффективным, по сравнению с методом частиц в ячейках, инструментом моделирования стационарных состояний пучка частиц в случае отсутствия необходимости дискретизации начальных данных по множеству измерений. Использование случайного начального распределения модельных частиц в итерационном методе приводит к большим колебаниям в распределении пространственного заряда и расходимости метода. При расчете методом частиц в ячейках подавление счетного шума сглаживанием пространственной плотности заряда позволяет заметно улучшить точность расчета, снизив осцилляции, вносимые случайным стартом.

Литература:

1. Алдыбеев, В. В. Оптимизационный алгоритм расчета плотности тока эмиссии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 4. с. 56–72
2. Месяц, Е. А. Методы оценки и повышения точности решения задач физики плазмы методом частиц в ячейках: Ph.D. thesis / Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. — Новосибирск, 2014—110 с.
3. César, C. Xavier and Cláudio C. Motta. The XMGUN Particle Path FEM Code IEEE Transactions on Magnetics, vol. 46, No. 8, August 2010
4. Child, C. D. Discharge from hot cao / C. D. Child // Phys. Rev. Series I. — 1911. — Vol. 32, № 5. — pp. 255–282.
5. Hockney, R. Computer Simulation Using Particles / R. Hockney, J. Eastwood. — Francis, 1988. — 540 pp.
6. Jolliet, S., Bottino A., Angelino P., et al. A global collisionless PIC code in magnetic coordinates // Computer Physics Communications. — 2007. — Vol. 177. — P. 409–425.
7. Lapenta, G., Particle In Cell Method A brief description of the PIC Method // Centrum voor Plasma Astrofysica Katholieke Universiteit Leuven
8. Mesyats, E. A. A noise-reducing algorithm for Particle-in-Cell plasma simulation // Bull. Nov. Comp. Center, Num. Anal., 14 (2009), pp. 21–30

10. Mudiganti, J. C. An Emission Model for the Particle-in-Cell Method: Ph.D. thesis / Darmstadt: TU Darmstadt. — 2006. — 123 pp.
11. Sydora, R. D. Low-noise electromagnetic and relativistic Particle-in-Cell plasma simulation models // J. Comp. Appl. Math.. — 1999.. — Vol. 109.. — P. 243–259.

## Оптические фильтры на основе наноструктур с квантовыми точками

Смердов Ростислав Сергеевич, магистрант  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

*В работе рассмотрены физические принципы и методы реализации фильтров оптического диапазона на основе плазмонных наноструктур и композиционных наночастиц  $Fe_mO_n-SiO_2$ .*

**Ключевые слова:** наноструктуры, плазмонный резонанс, оптическая фильтрация, биосенсорика

Наноструктуры с квантовыми точками дают уникальную возможность манипулировать светом на субволновом уровне, используя различные формы, такие как кубы [1,2], кластеры [3], оболочки [4], диски [6], пористые структуры [7,8], кольца [9], стержни [10] и наночастицы произвольной формы. Так же было представлено множество плазмонных устройств, включая модуляторы, интерферометры, переключатели, поляризаторы и поглотители [11,12]. Плазмонные структуры, используемые в качестве оптических фильтров обладают следующими преимуществами [13]: полоса пропускания перестраивается за счет изменения геометрических параметров и материалов наночастиц, фильтр способен функционировать в насыщенных влагой средах, таких как химические и биологические растворы, так как реакции между органическими растворами и металлическими наночастицами не проходят, невысокая себестоимость плазмонных фильтров в связи с технологией воспроизведения приборов, двумерный массив металлических наночастиц может быть использован в качестве высокоэффективного поляризационного фильтра в видимом диапазоне благодаря анизотропному отклику на электромагнитную волну.

Wu et al. продемонстрировал возможность создания плазмонного фильтра, основанного на метаматериалах, применимого для обработки сигналов в терагерцовом диапазоне. Реализация плазмонной структуры в терагерцовом диапазоне может привести к созданию ФВЧ для терагерцовых систем построения изображения [14]. Как толщина, так и период массивов металлических наночастиц обуславливают поверхностный плазмонный резонанс, соответственно влияя на поток фотонов. Fu et al. предложил плазмонный фильтр для видимого диапазона, основанный на массиве ромбических наночастиц серебра [13]. Однако, массив наночастиц треугольной формы, расположенных в вершинах шестиугольников обеспечивает более стабильную структуру и оптические свойства в отличие от массивов ромбических наночастиц серебра. Более того, чувствительность показателя преломления (RIS) сильно зависит от расположения, толщины и периода наномассивов.

### Оптические фильтры на основе плазмонного резонанса в металлических наночастицах

На рисунке 1 схематически изображен макроскопический объем металла (например, золота или серебра), подвергающийся оптическому облучению.

В данной ситуации никаких уникальных физических явлений не наблюдается. Однако, если размеры данного металлического объекта уменьшить и, в конечном счете привести к наномасштабным, то наночастица под воздействием оптического излучения может начать излучать, резонировать и оказаться мощным наноразмерным локализованным источником света. Подобные локализованные источники излучения применимы в различных областях науки и технологии, таких как сканирующая ближнепольная оптическая микроскопия [6], нанолитография [12], биосенсорика [14], рамановская спектроскопия (SERS) [13], нанофотоника [14].

Эксперименты показывают, что металлические (золотые и серебряные) наночастицы могут проявлять резонансные свойства на определенных частотах, при которых выполняются следующие условия: диэлектрическая проницаемость наночастицы отрицательная, длина волны, распространяющейся в свободном пространстве, велика по сравнению с размерами наночастицы.

Последнее условие, очевидно, предполагает, что резонанс по своей природе электростатический. Если диэлектрическая проницаемость частицы отрицательная, то теорема единственности электростатики не выполняется. По этой причине, могут появляться беззарядовые электростатические поля для определенных отрицательных значений диэлектрической проницаемости. Соответствующие беззарядовые электрические поля отвечают резонансным плазмонным модам.

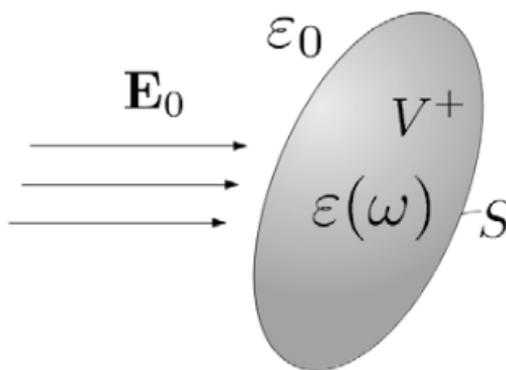


Рис. 1. Макроскопический объем металла, подвергающийся воздействию оптического излучения [15]

Необходимо отметить, что плазмонный резонанс в металлических наночастицах — физическое явление, обусловленное наноразмерными масштабами, поскольку два условия резонанса (отрицательная диэлектрическая проницаемость и малость частицы по сравнению с длиной волны) могут быть одновременно реализованы в наномасштабе.

Возникает вопрос о корректности применения термина «диэлектрическая проницаемость» применительно к металлическим наночастицам, подвергающимся воздействию оптического излучения. Причина состоит в том, что электроны проводимости в металлических наночастицах «закрепляются» оптическим излучением и осуществляют осциллирующие колебания около некоего положения равновесия. В таком случае, электроны проводимости невозможно отличить от связанных зарядов в диэлектриках. Именно поэтому металлические наночастицы ведут себя на оптических частотах подобно диэлектрикам с дисперсией. Последнее означает, что диэлектрическая проницаемость зависит от частоты. Для определенного диапазона частот вещественная часть диэлектрической проницаемости может принимать отрицательные значения. Для металлов этот диапазон частот приходится на их плазмонную частоту, где соотношение дисперсии полностью определяется взаимодействием между электромагнитным излучением (светом) и электронами проводимости. Для хороших проводников (таких как серебро или золото), плазмонные частоты находятся в видимом диапазоне, что объясняет применение серебряных и золотых наночастиц для изучения плазмонного резонанса и практических применений.

Важно отметить, что плазмонный резонанс имеет место не только в металлических наночастицах, но и на любых наночастицах, диэлектрическая проницаемость которых проявляет дисперсию, принимающую отрицательные значения. Одним из примеров служит карбид кремния (SiC) отрицательная диэлектрическая проницаемость которого обусловлена не взаимодействием электронов проводимости со светом, а специфическими свойствами вибраций кристаллической решетки в полярных кристаллах [15].

Как уже было упомянуто ранее, второе условие — малость размеров наночастицы по сравнению с длиной волны падающего света — раскрывает физическую природу плазмонного резонанса в наночастицах как электростатический резонанс. Действительно, вследствие этого условия гармонические электромагнитные поля в пределах и вблизи наночастиц изменяются практически синфазно. Как результат, в любой момент времени эти поля могут быть рассмотрены как электростатические. Электростатическая природа плазмонного резонанса в наночастицах и их отрицательная диэлектрическая проницаемость предполагают усиление локальных электрических полей внутри наночастиц и поблизости от них. На рисунке 2 изображена сферическая наночастица с отрицательной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , подвергающейся воздействию однородного внешнего поля  $\mathbf{E}_0$ . Поскольку  $\epsilon < 0$ , вектор поляризации  $\mathbf{P}$  направлен противоположно  $\mathbf{E}_0$ , что приводит к образованию поверхностных электрических зарядов, создающих «деполяризующее» поле  $\mathbf{E}'$ , сонаправленное  $\mathbf{E}_0$ . Это приводит к увеличению суммарного электрического поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$  внутри сферической наночастицы.

Частота плазмонного резонанса в металлических наночастицах не зависит от размера самой наночастицы (при выполнении условия малости размера частицы по сравнению с длиной волны падающего излучения). Такая инвариантность относительно размера подразумевает, что в случае массива почти одинаковых по форме, но разных по размерам металлических наночастиц они могут резонировать на практически одинаковых длинах волн. Следовательно, плазмонный резонанс может быть одновременно возбужден на всех наночастицах сразу.

Формулировка задачи на собственные значения для плазмонного резонанса позволяет напрямую рассчитать отрицательные значения диэлектрической проницаемости на которых происходит плазмонный резонанс. Эти отрицательные значения диэлектрической проницаемости могут быть использованы для любого дисперсионного соотношения конкретного сорта наночастиц с целью определить соответствующие частоты плазмонного резонанса. Таким образом, свойства плазмонного резонанса, определяемые формой наночастиц могут быть полностью отделены от свойств, зави-

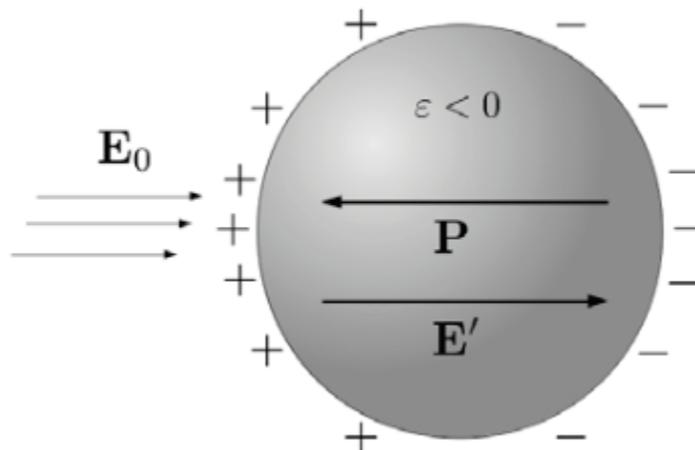


Рис. 2. Сферическая наночастица с отрицательной диэлектрической проницаемостью, подвергающаяся воздействию внешнего электрического поля [15]

сящих от дисперсионного соотношения. Другими словами, решение задачи на собственные значения плазмонного резонанса для наночастицы определенной формы может быть использовано для различных материалов этой наночастицы с целью нахождения резонансных частот.

Изучение возбуждения плазмонных мод падающим светом и эффекты омических потерь и потерь на излучение показывает, что дипольные плазмонные моды возбуждаются падающим излучением, создаваемым удаленными источниками. Это утверждение справедливо, поскольку электрическое поле этого излучения практически однородно в области нахождения наночастицы в связи с малостью размеров наночастицы по сравнению с длиной волны падающего света.

Падающее излучение наиболее эффективно взаимодействует с плазмонной модой, если дипольный момент этой моды параллелен направлению электрического поля падающего излучения. Анализ возбуждения плазмонных мод также показывает, что качество плазмонного резонанса, то есть локальное усиление падающего оптического излучения, можно контролировать, изменяя отношение между вещественной частью диэлектрической проницаемости к ее мнимой части на частоте резонанса. Для золота и серебра соотношение наиболее приемлемо, когда длина волны излучения, распространяющегося в свободном пространстве находится в пределах от 650–1000 нм и 600–1400 нм соответственно (рисунок 3 а, б) [16].

Таким образом, плазмонный резонанс в золотых и серебряных наночастицах может быть возбужден наиболее эффективно на соответствующих диапазонах частоты. Из рисунка 3 видно, что отношение между вещественной частью ди-

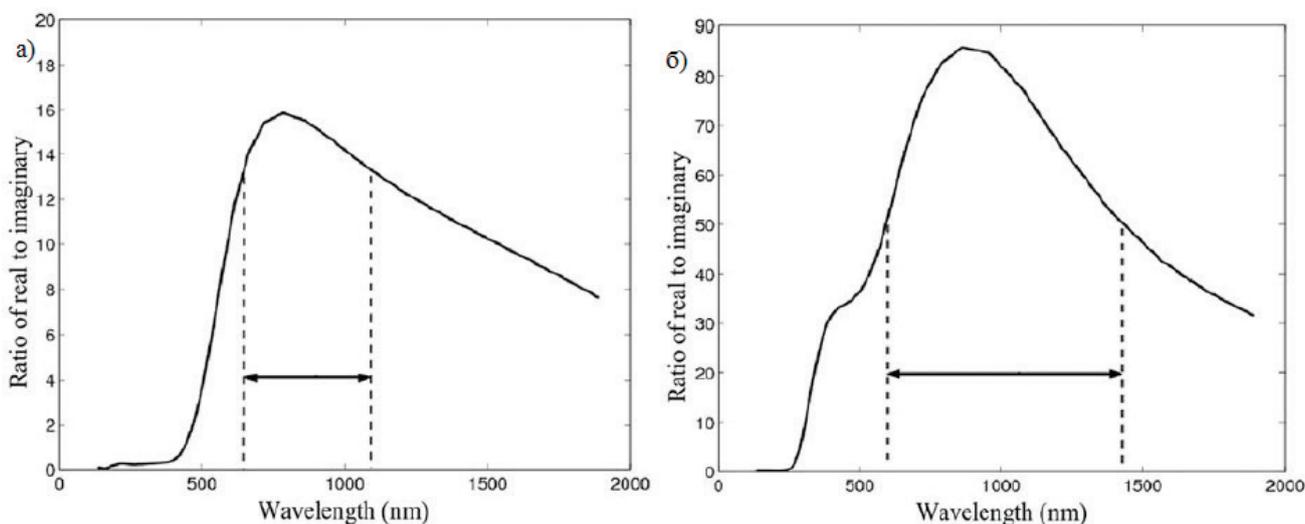


Рис. 3. Зависимость отношения между вещественной частью диэлектрической проницаемости к ее мнимой части для золота а) и серебра б) [16]

электрической проницаемости к ее мнимой части значительно выше для серебра, чем для золота. Этот фактор особенно важен для поверхностного рамановского рассеяния (SERS), где для экспериментов прежде всего используются наночастицы серебра (хотя окисление серебра представляет некоторые трудности).

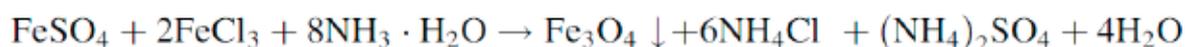
### Оптические фильтры на основе композиционных магнитных наночастиц $Fe_mO_n-SiO_2$

Последние двадцать лет ферромагнитные жидкости являлись объектом интенсивного исследования в первую очередь благодаря возможности коммерческого применения в различных областях [17], в том числе непроницаемые герметики, радиаторы для громкоговорителей и трансформаторов, вязкие демпферы, сепараторы, чернила на основе магнитных жидкостей, актюаторы, датчики ускорения и позиционирования, контрастирующий агент для наблюдения кровотока в неинвазивных измерениях. [2] Также ферромагнитные жидкости широко применяются при исследованиях фундаментальных физических явлений. Эмульсии, основанные на ферромагнитных жидкостях используются в качестве модельной системы для изучения природы коллоидальных взаимодействий [18]. Вышеупомянутые исследования обеспечили понимание условий стабилизации коллоидных суспензий, что, в свою очередь, привело к развитию областей применения эмульсий ферромагнитных жидкостей: детектирование дефектов в ферромагнитных компонентах и материалах [7].

Ферромагнитные жидкости могут быть использованы при создании полосовых фильтров в оптическом диапазоне [19]. Существует три основных типа оптических фильтров: оптический ФНЧ (фильтр низких частот), оптический ФВЧ (фильтр высоких частот) и оптический ПФ (полосовой фильтр). Оптические ФНЧ используются в качестве заграждающих при флуоресценции, поскольку обеспечивают прохождение эмитированного при флуоресценции света, задерживая сигнал возбуждения. Оптические ФВЧ применяются для фильтрации сигнала возбуждения. Такие фильтры, разработанные для спектроскопии, называются спектроскопическими фильтрами.

Оптические ПФ пропускают свет только в определенной полосе длин волн шириной от менее одного до десятков нанометров. Такие фильтры применяются в широком диапазоне научно-производственных областей, включающих спектрофотометрию, медицинскую диагностику, химический анализ, колориметрию и астрономию. При использовании в спектрофотометрии оптические ПФ предпочтительнее монохроматоров в связи с лучшим коэффициентом пропускания и отношением сигнал-шум.

Магнитные наночастицы получены по двух стадийной методике. Изначально, золь был приготовлен при растворении тетраэтоксисилана (TEOS) в изопропанол. Содержание TEOS менялось от 20 до 80 об.%. После добавления гидрированного аммиака произошла золь-гель реакция. Затем, осадок был высушен при комнатной температуре и подвергся отжигу при температуре 300°C в течение 15 минут для получения ксерогеля. Ксерогель подвергся ультразвуковому воздействию в водных растворах  $Fe^{3+}$  и  $Fe^{2+}$ . Гидрированный аммиак был добавлен в смесь для инициации реакции:



В ходе реакции были образованы большие скопления наночастиц, осажденные в течение нескольких часов. Осаждение не происходит в растворах, включающих ксерогель  $SiO_2$  независимо от их состава. В этом случае растворы оста-

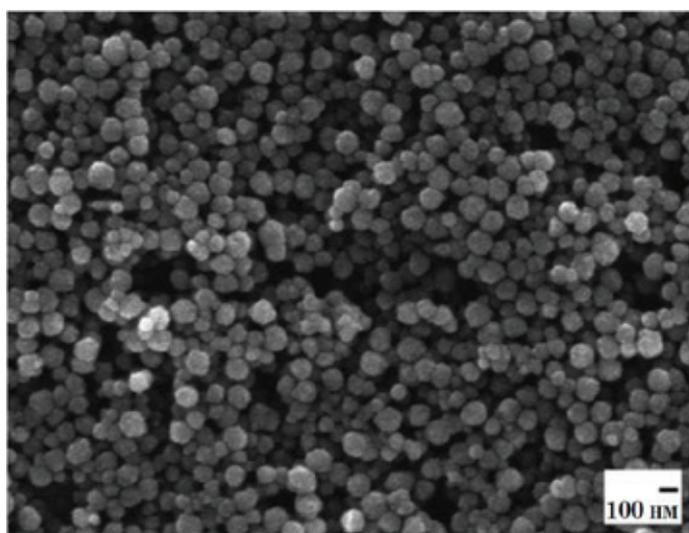


Рис. 4. РЭМ-изображение наночастиц магнетита, стабилизированных олеиновой кислотой. [20]

вались стабильны по крайней мере 30 дней. Осажденные наночастицы были промыты дистиллированной водой с целью удалить растворимые в воде соли аммония. Седиментация под действием силы тяжести оказалась пренебрежимо мала.<sup>1</sup>

На рисунке 5 представлен результат математической обработки спектров оптического поглощения коллоидного раствора  $\text{Fe}_m\text{O}_n\text{-SiO}_2$  при концентрации TEOS 60 vol.%. Исследования ряда композиционных структур, содержащих нанокристаллиты  $\text{TiO}_2$  [21] позволяют связать существование полос с образованием наноструктур различного размера. Согласно теории Г. Мие [22], представляется возможным моделировать полосу поглощения композиционной системы за счет изменения геометрических размеров агломератов  $\text{Fe}_m\text{O}_n$  на поверхности  $\text{SiO}_2$  (что, в свою очередь, позволяет использовать данную систему в качестве режектурирующего фильтра в оптическом диапазоне):

$$K_{\max}\Gamma = An4\pi R^3/3 \quad (1)$$

где  $K_{\max}$  — максимальный коэффициент поглощения,  $\Gamma$  — полуширина полосы поглощения ( $\text{см}^{-1}$ ),  $A = 1,25 \times 10^2$  эВ/мм — оптическая константа,  $R$  — радиус коллоидных частиц,  $n$  — число частиц в единице объема.

Оценочный радиус кластеров, полученный по этой формуле,  $R = 1.9$  нм, 1.8 нм и 2.07 нм соответственно для полос поглощения кластеров,  $28488 \text{ см}^{-1}$ ,  $27275 \text{ см}^{-1}$ ,  $29536 \text{ см}^{-1}$  (при концентрации TEOS 60 об. %) [3].

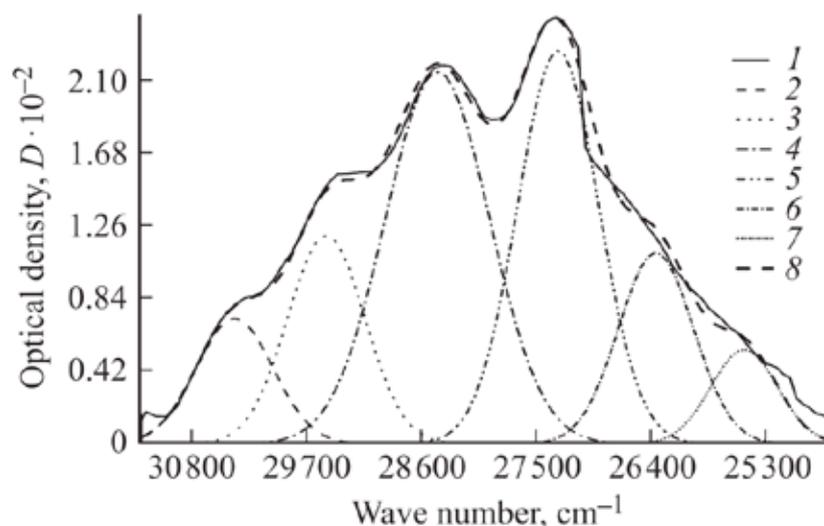


Рис. 5. Результат разложения спектра оптического поглощения коллоидного раствора  $\text{Fe}_m\text{O}_n\text{-SiO}_2$  при концентрации TEOS 60 vol.% на гауссовы составляющие: 1 — исходный спектр поглощения; полосы поглощения, характеризующиеся положениями максимумов,  $\text{см}^{-1}$ ; 2–30480, 3–29530, 4–28480, 5–27300, 6–26220, 7–25130, 8 — результат суммирования полученных полос поглощения [3]

### Заключение

Продемонстрирована принципиальная возможность построения фильтров оптического диапазона на основе поверхностного плазмонного резонанса в металлических наночастицах.

Композиционные магнитные наночастицы  $\text{Fe}_m\text{O}_n\text{-SiO}_2$  исследованы методом спектроскопии оптического поглощения с использованием теории Г. Мие. Обнаружены шесть полос поглощения, связанных с образованием на поверхности пористой матрицы  $\text{SiO}_2$  конгломератов  $\text{Fe}_m\text{O}_n$  шести характерных размеров. На основании полученных экспериментальных данных предложен метод реализации фильтров режектурирующего типа.

Статья посвящается памяти профессора, д.ф. — м. наук Бочаровой Татьяны Викторовны.

<sup>1</sup> Синтез образцов выполнен ассистентом К. Г. Гареевым

Литература:

1. H.J. Chen, Z.H. Sun, W.H. Ni et al., Nano resonance in (gold core) — (dielectric shell) nanostructures without symmetry breaking // *Small*, vol. 5, pp. 2111–2119, 2009
2. X. Kou, Z. Sun, Z. Yang et al Curvature directed assembly of gold nanocubes, nanobranches, and nanospheres // *Langmuir*, vol. 25, no. 3, pp. 1692–1698, 2009.
3. Р. С. Смердов, Т. В. Бочарова, В. С. Левицкий, К. Г. и др. Спектроскопические свойства гамма-облученных композитных наночастиц FemOn-SiO<sub>2</sub> // *ФТТ*, Т. 58, № 5, с.892–896, (2016).
4. J. B. Lassiter, J. Aizpurua, L. I. Hernandez et al. Close encounters between two nanoshells // *Nano Letters*, vol. 8, no. 4, pp. 1212–1218, 2008.
5. Zorirc, E. M. Larsson, B. Kasemo et al, Localized surface plasmons shed light on nanoscale metal hydrides // *Advanced Materials*, vol. 22, no. 41, pp. 4628–4633, 2010.
6. Y. J. Liu, Y. B. Zheng, J. Liou et al, All-optical modulation of localized surface plasmon coupling in a hybrid system composed of photoswitchable gratings and au nanodisk arrays // *The Journal of Physical Chemistry C*, vol. 115, no. 15, pp. 7717–7722, 2011.
7. T. W. Ebbesen, H. J. Lezec, H. F. Ghaemi et al, Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays // *Nature*, vol. 391, no. 6668, pp. 667–669, 1998.
8. Y. J. Liu, E. S. P. Leong, B. Wang et al, Optical transmission enhancement and tuning by overlying liquid crystals on a gold film with patterned nanoholes, // *Plasmonics*, vol. 6, no. 4, pp. 659–664, 2011.
9. R. Halpern and R. M. Corn Lithographically patterned electrodeposition of gold, silver, and nickel nanoring arrays with widely tunable near-infrared plasmonic resonances // *ACS Nano*, vol. 7, no. 2, pp. 1755–1762, 2013.
10. H. Chen, L. Shao, Q. Li et al, Gold nanorods and their plasmonic properties, // *Chemical Society Reviews*, vol. 42, no. 7, pp. 2679–2724, 2013.
11. J. A. Dionne, K. Diest, L. A. Sweatlock et al, PlasMOSstor: a metal-oxide-Si field effect plasmonic modulator // *Nano Letters*, vol. 9, no. 2, pp. 897–902, 2009.
12. Y. K. Gao, Z. M. Xin, Q. Q. Gan et al, Plasmonic interferometers for label-free multiplexed sensing // *Optics Express*, vol. 21, no. 5, pp. 5859–5871, 2013.
13. Y. Q. Fu, S. L. Zhu, X. L. Zhou et al, Rhombic silver nanoparticles array-based plasmonic filter // *International Journal of Modern Physics B*, vol. 25, no. 19, pp. 2557–2566, 2011.
14. M. Lubecke, K. Mizuno, G. M. Rebeiz, Micromachining for terahertz applications // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, no. 11, pp. 1821–1831, 1998.
15. D. Mayergoyz, Plasmon Resonances in Nanoparticles, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 325 (2013).
16. P. B. Johnson and R. W. Christy, *Physical Review B* 6, 4370 (1972).
17. Основы золь-гель технологии нанокompозитов / Максимов А. И., Мошников В. А., Таиров Ю. М., Шилова О. А.
18. СПб: Лань, 2008, 304 с.
19. И. Е. Кононова, К. Г. Гареев, В. А. Мошников и др Самосборка фрактальных агрегатов системы магнетит-диоксид кремния в постоянном магнитном поле, // *Неорг. Матер.* том 50, № 1, с. 1–7. 2014
20. John Philip et al. A tunable optical filter // *Measurement Science and Technology*, 14, 1289–1294, (2003)
21. К. Г. Гареев, В. В. Лучинин, В. А. Мошников, Магнитные наноматериалы, получаемые химическими методами, // *Биотехносфера*. № 5 (29), с.2–13, (2013).
22. S. D. Stookey. USA Pat. 2920971, 1960.
23. L. Gao, T. J. Vadamkan, V. Nammalvar. Nanoshells for in vivo imaging using two-photon excitation microscopy // *Nanotechnology* 22, 36, 365 102 (2011).

## Исследование гамма-переходов с энергиями 149.01 кэВ ядра <sup>153</sup>Tb

Юлдашев Джасур Орзикулович, ассистент;  
 Шукуров Гайрат Давлатович, ассистент  
 Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Исследования схемы распада <sup>153</sup>Dу проведена в работе [1]. Фрагмент схемы распада <sup>153</sup>Dу показано на рис.1. В данной работе мы изучили конверсионные элек-

троны гамма-излучения и на основе полученных данных определили параметры проникновения «λ». Ядерным параметром называется отношения вероятности внутриядерной

конверсии к вероятности испускания гамма-излучения с того же возбужденного состояния ядра. Для задержанных гамма-переходов аномальный ЭВК возникает при взаимодействии нуклона с электроном оболочки атома. При за-

держке гамма-перехода нуклон при своём движении в ядре может вовлечь за собой электрон, который в течении интервала времени  $\Delta t$  проникает внутрь ядра. В этом случае возникает внутриядерная конверсия электрона.

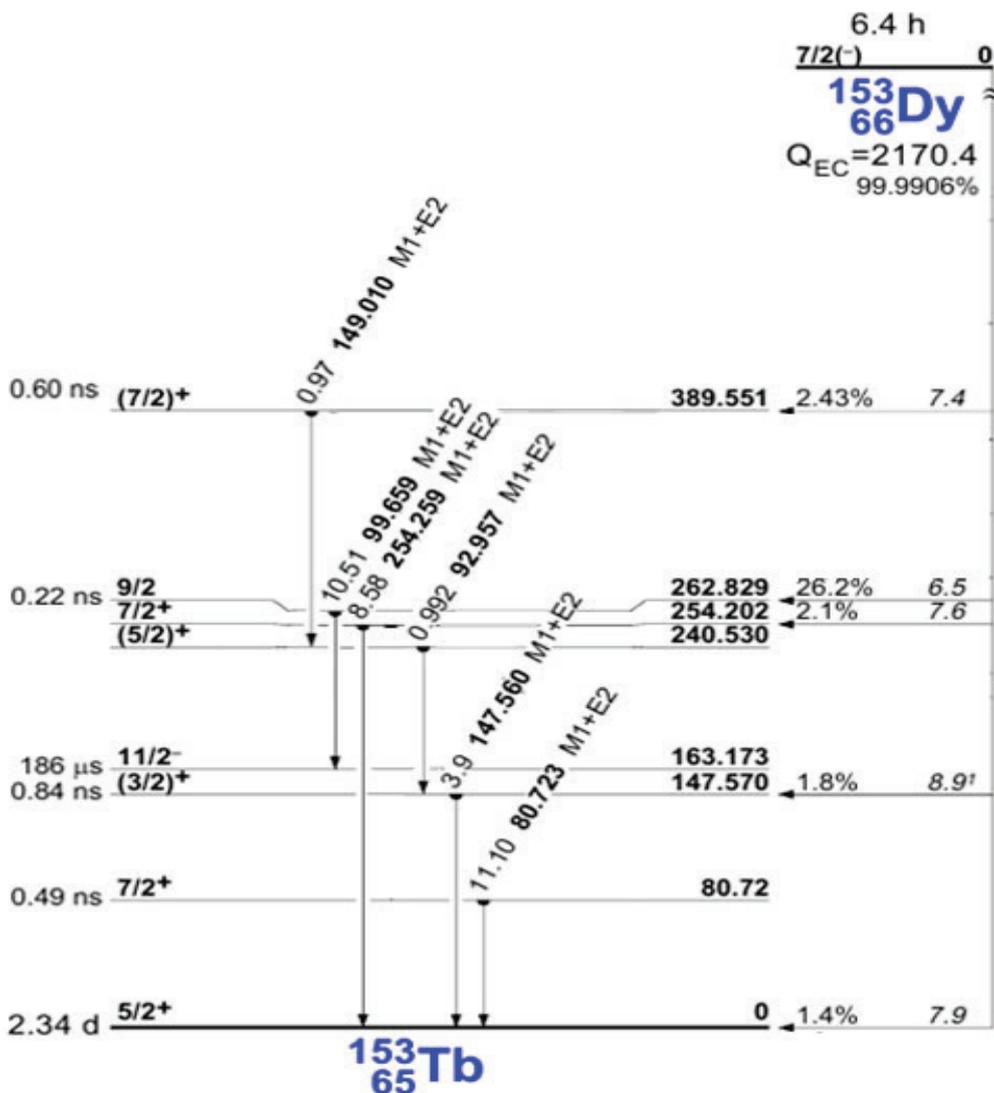


Рис. 1. Фрагмент схемы распада ядра  $^{153}\text{Dy}$

Измерения спектров электронов внутренней конверсии проводились при помощи бета-спектрографов с постоянным однородным магнитным полем с разрешающей способностью 0.05%. Для регистрации электронов

использовались фотопластинки типа НИКФИ-50. Их фотометрирование проводились на автоматическом микрофотометре, связанном с ЭВМ. Спектры ЭВК  $^{153}\text{Dy}$  показано на рис.2.

Таблица 1. Коэффициенты КВК и коэффициенты разложения волновой функции электрона

$E_\gamma, \text{keV}$	$L_I / L_{II}$ $L_I / L_{III}$ $L_{II} / L_{III}$	$\alpha(M1)$	$\alpha(E2)$	$B1(M1)$	$B2(M1)$
149.01	6.1(15)	0.08172	0.0373	-2.679E-2	1.8098E-4
	15(4)	0.00645	0.0935	-8.742E-3	2.0643E-5
	2.5(6)	0.001061	0.0743	-3.600E-5	7.7568E-9

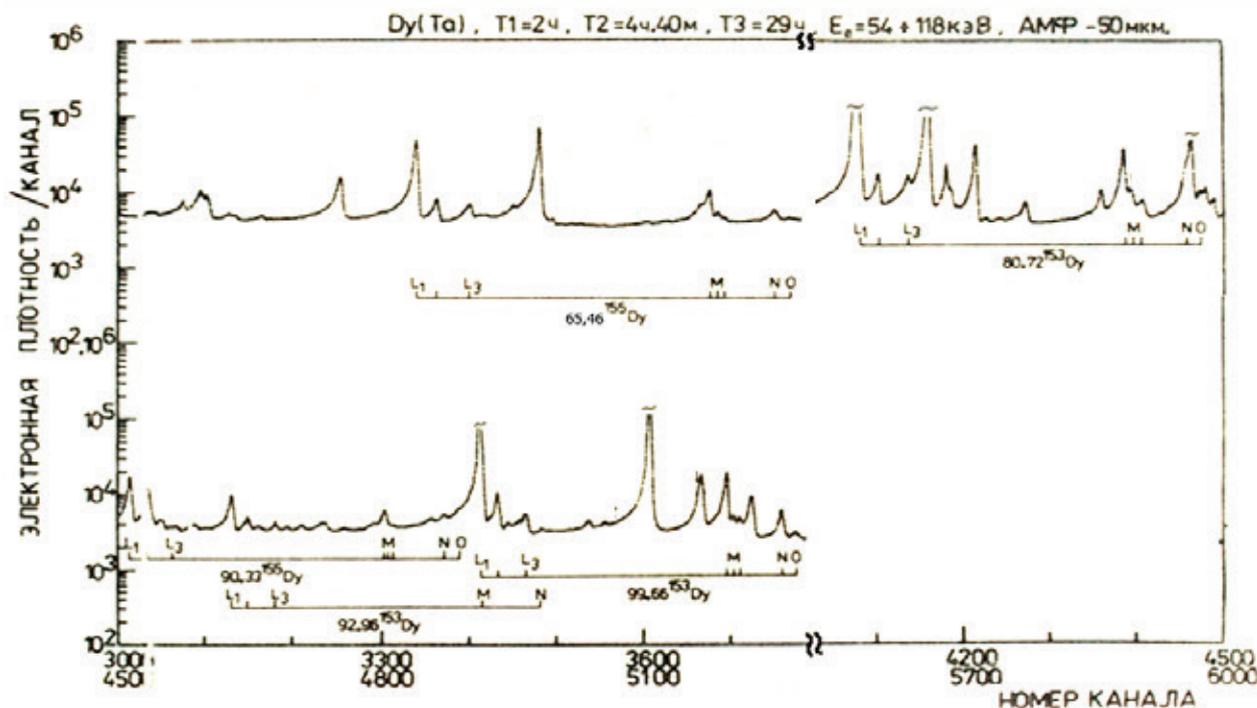


Рис. 2. Спектр ЭВК <sup>153</sup>Dy

В таблице 1 приведены отношения интенсивностей ЭВК  $L_I$ ,  $L_{II}$  и  $L_{III}$  подоболочек атома, теоретические значения КВК и коэффициенты разложения волновой функции электрона. В таблице 2 приведены значения ядерного параметра  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , параметры смешивания  $\delta^2_1$  и  $\delta^2_2$ . Как видно, наблюдается возрастание значения  $\delta^2$  при значении  $\lambda \neq 0$ . Отношения экспериментального значения КВК к теоретическому значению КВК M1-перехода для  $L_I$  оболочки близка к единице, но для  $L_{II}$  и  $L_{III}$  больше единицы (табл.3). Аномалия КВК наблюдается для ЭВК  $L_{II}$  и  $L_{III}$  подоболочек атома.

На рис.3 (а) показана зависимость КВК от ядерного параметра  $\lambda$  для гамма-перехода с энергией 149.01 кэВ. Из ри-

сунка видно, что фокальный параметр параболы  $L_I$  значительно меньше чем фокальные параметры параболы  $L_{II}$  и  $L_{III}$  подоболочки атома. Поэтому зависимость  $\delta^2$  от  $\lambda$  на рисунке получаются как прямые линии. Ядерный параметр гамма-перехода 149.01 кэВ равно -4.0. Выбор минимального значения ядерного параметра связано с тем, что значения КВК не сильно отличается от теоретического значения КВК.

Гамма-переход 149.01 кэВ размещен в схеме распада <sup>153</sup>Dy между энергетическими состояниями с энергиями 389.6 и 240.5 кэВ и имеет мультипольность M1+E2. На рис.3 (в) показано зависимость параметра смешивания  $\delta^2$  от ядерного параметра  $\lambda$ . В этом случае значение  $\lambda = 15.6 \pm 0.5$ . (табл.3).

Таблица 2. КВК смешанной мультипольности  $\alpha(M1+E2)$  и ядерные параметры  $L_I$ ,  $L_{II}$  и  $L_{III}$  подоболочках <sup>153</sup>Tb.

$E_\gamma, keV$	$\alpha(M1+E2)$ $\lambda=0$	$\alpha(M1+E2)$ $\lambda_1$	$\alpha(M1+E2)$ $\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\delta^2_1$	$\delta^2_2$ 3,11E-03 ±2,6E-05	$\delta^2, \lambda=0$
149.01	7,845E-02	5,082E-02	1,020E-02	15,55 ±0,52	99,53 ±0,1	0,03283 ±0,0008	-0,00512 ±7E-05	0,0795
	1,146E-02	8,399E-03	1,686E-03					0,0611
	3,958E-03	3,388E-03	6,802E-04					0,0412

Таблица 3. Отношения КВК для ядерного параметра.

Yadro	$E_\gamma, keV$	$\alpha(M1+E2) (\lambda = 0)$			$\alpha(M1+E2) (\lambda \neq 0)$ $\lambda=0 \boxtimes$		
		L1	L2	L3	L1	L2	L3
153-Tb	149.01	0.96	0.12	3.73	0.62	0.09	3.2

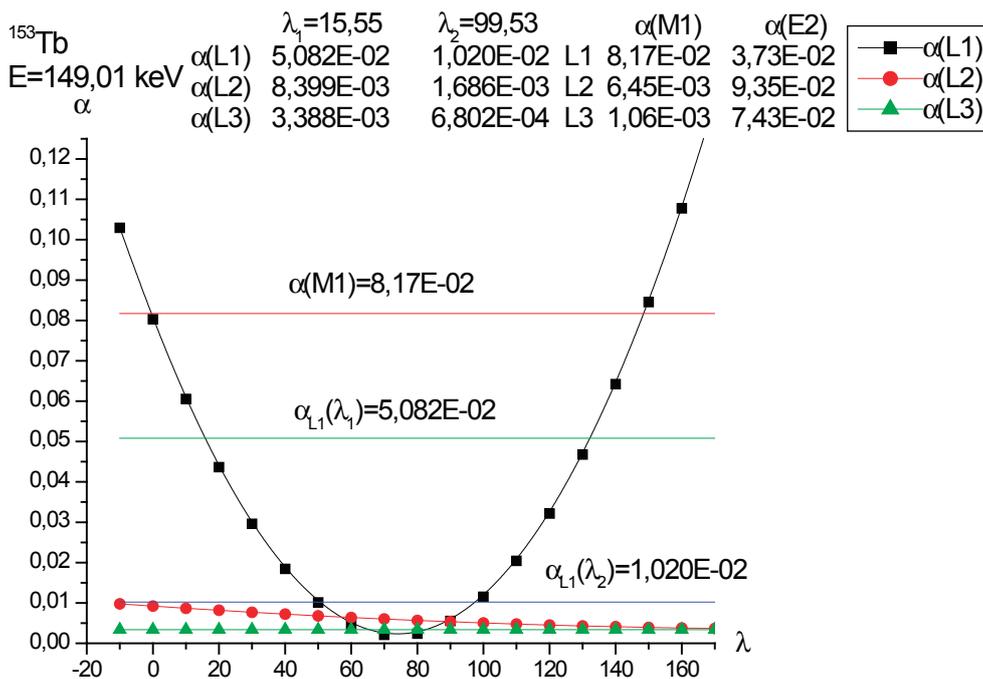


Рис. 3

Литература:

1. Абдуразаков, А. А., Вылов Ц., Громов К. Я., Исламов Т. А., Караходжаев А., Кузнецов В. В., Лебедев Н. А., Нгуен Конг Чанг, Оманов Ш. Изв. АН СССР, сер. физ., 1980, 44, с. 1798–1841.

### Исследование гамма-переходов с энергии 254.3 кэВ ядра $^{153}\text{Tb}$

Юлдашев Джасур Орзикулович, ассистент;  
 Шукуров Гайрат Давлатович, ассистент  
 Бухарский государственный университет (Узбекистан)

В данной работе мы изучили конверсионные электроны гамма-излучения и на основе полученных данных определили параметры проникновения « $\lambda$ ». Ядерным параметром называется отношения вероятности внутриядерной конверсии к вероятности испускания гамма-излучения с того же возбужденного состояния ядра. Для задержанных гамма-переходов аномальный ЭВК возникает при взаимодействии нуклона с электроном оболочки атома. При задержке гамма-перехода нуклон при своём движении в ядре может вовлечь за собой электрон, который в течении интервала времени  $\Delta t$  проникает внутрь ядра. В этом случае возникает внутриядерная конверсия электрона. Фрагмент схемы распада  $^{153}\text{Dy}$  показано на рис.1.

Измерения спектров электронов внутренней конверсии проводились при помощи бета-спектрографов с постоянным однородным магнитным полем с разрешающей способностью 0.05%. Для регистрации электронов

использовались фотопластинки типа НИКФИ-50. Их фотометрирование проводились на автоматическом микрофотометре, связанном с ЭВМ. Спектры ЭВК  $^{153}\text{Dy}$  показано на рис.1.

В таблице 1 приведена отношения интенсивностей ЭВК  $L_I$ ,  $L_{II}$  и  $L_{III}$  подболочек атома, теоретические значения КВК и коэффициенты разложения волновой функции электрона. В таблице 2 приведена значения ядерного параметра  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , параметры смешивания  $\delta^2_1$  и  $\delta^2_2$ . Как видно, наблюдается возрастание значения  $\delta^2$  при значении  $\lambda \neq 0$ . Отношения экспериментального значения КВК к теоретическому значению КВК M1-перехода для  $L_I$  оболочки близка к единице, но для  $L_{II}$  и  $L_{III}$  больше единицы (табл. 3). Аномалия КВК наблюдается для ЭВК  $L_{II}$  и  $L_{III}$  подболочек атома.

Гамма-переход 254.3 кэВ размещен в схеме распада  $^{153}\text{Dy}$  между энергетическими состояниями с энергиями 254.26 кэВ и основным состоянием  $^{153}\text{Tb}$  и имеет мульти-

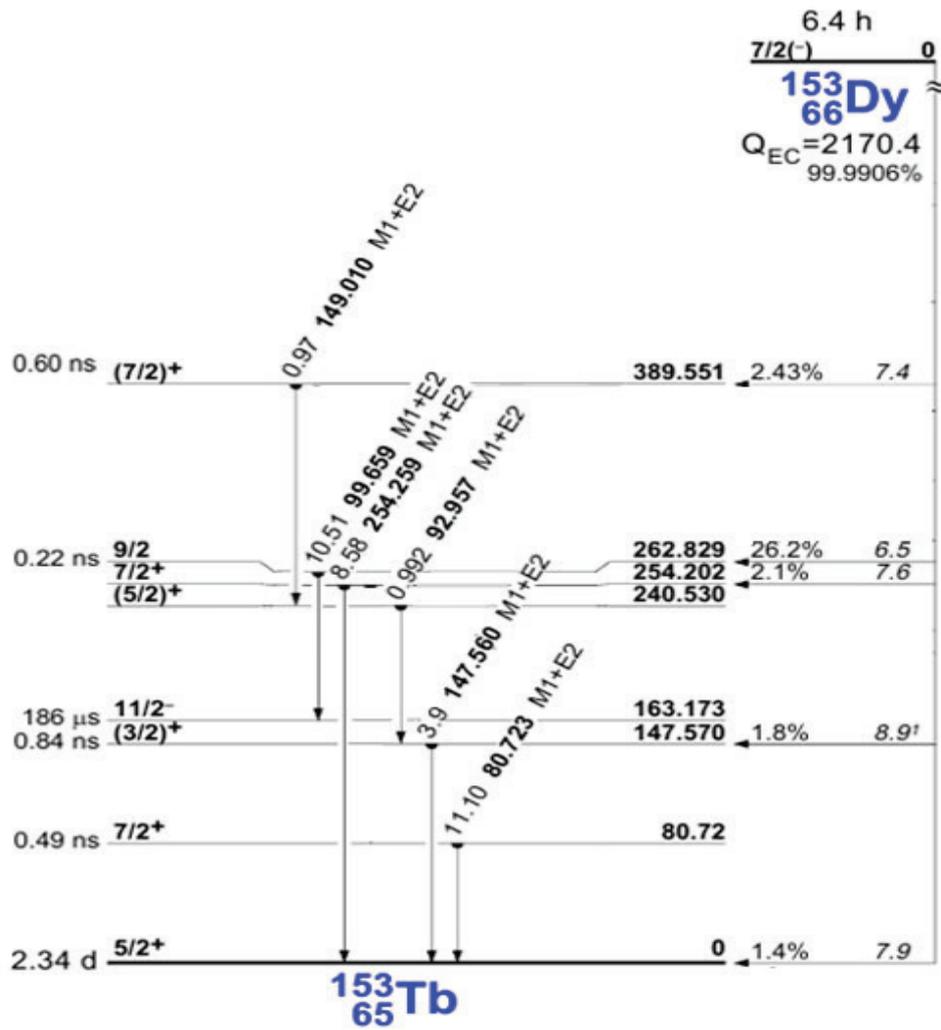


Рис. 1. Фрагмент схемы распада ядра  $^{153}\text{Dy}$

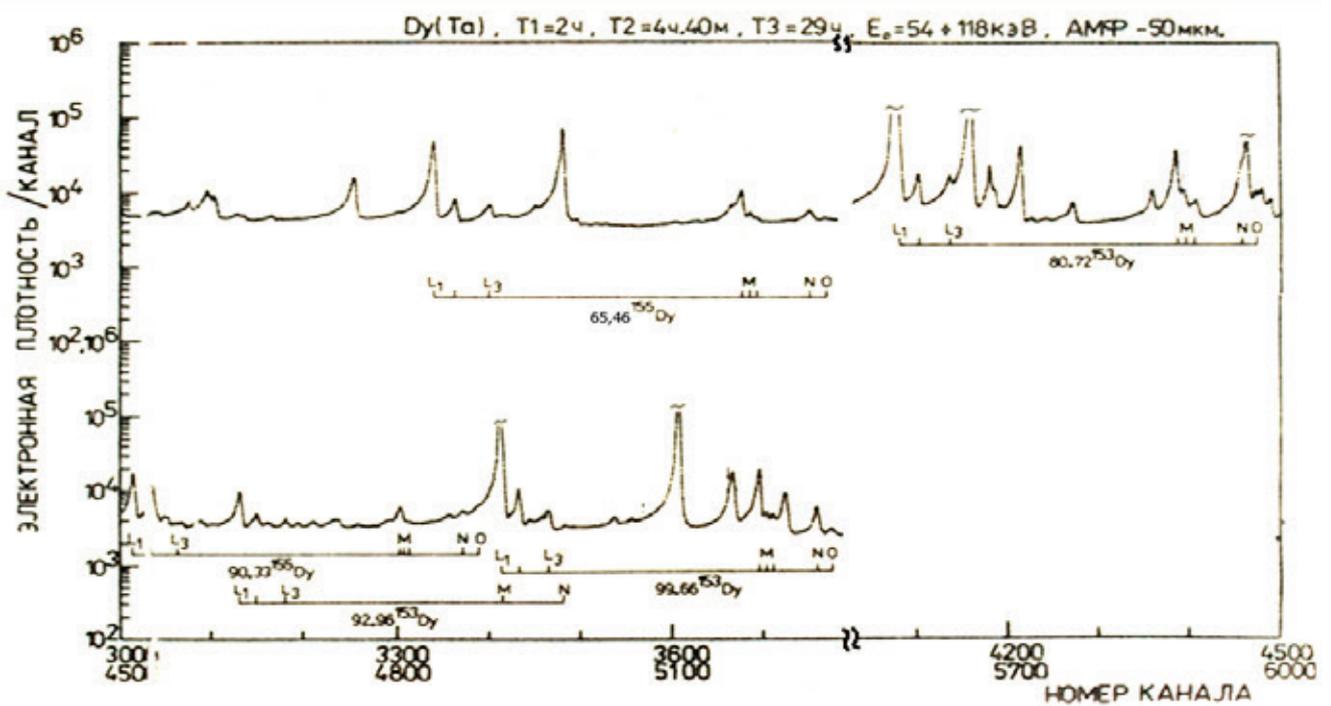


Рис. 1. Спектр ЭВК  $^{153}\text{Dy}$

польность M1+E 2. На рис.2 показано зависимость параметра смешивания  $\delta^2$  от ядерного параметра  $\lambda$ . В этом случае значение  $\lambda=10.1 \pm 0.3$ . На всех этих переходах зна-

чения параметра смешивания при  $\lambda \neq 0$  уменьшается относительно значения параметра смешивания при  $\lambda=0$  (табл. 2).

Таблица 1. Коэффициенты КВК и коэффициенты разложения волновой функции электрона

$E_\gamma, keV$	$L_I / L_{II}$	$\alpha(M1)$	$\alpha(E2)$	$B1(M1)$	$B2(M1)$
	$L_I / L_{III}$ $L_{II} / L_{III}$				
254.259	7.70(8)	1.87E-2	8.34E-3	-2.781E-2	1.9587E-4
	20.0(2)	1.35E-3	7.80E-3	-1.125E-2	3.3891E-5
	2.60(3)	2.2E-4	5.74E-3	-3.784E-5	1.084E-8

Таблица 2. КВК смешанной мультипольности  $\alpha(M1 + E2)$  и ядерные параметры  $L_I, L_{II}$  и  $L_{III}$  подболочек  $^{153}\text{Tb}$ .

$E_\gamma, keV$	$\alpha(M1 + E2)$ $\lambda=0$	$\alpha(M1 + E2)$ $\lambda_1$	$\alpha(M1 + E2)$ $\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\delta^2_1$	$\delta^2_2$ 3,11E-03 $\pm 2,6E-05$	$\delta^2,$ $\lambda=0$
	254.3	1,73E-02	1,338E-02					
2,114E-03		1,739E-03	1,474E-04	0,134				
7,64E-04		6,695E-04	5,673E-05	0,109				

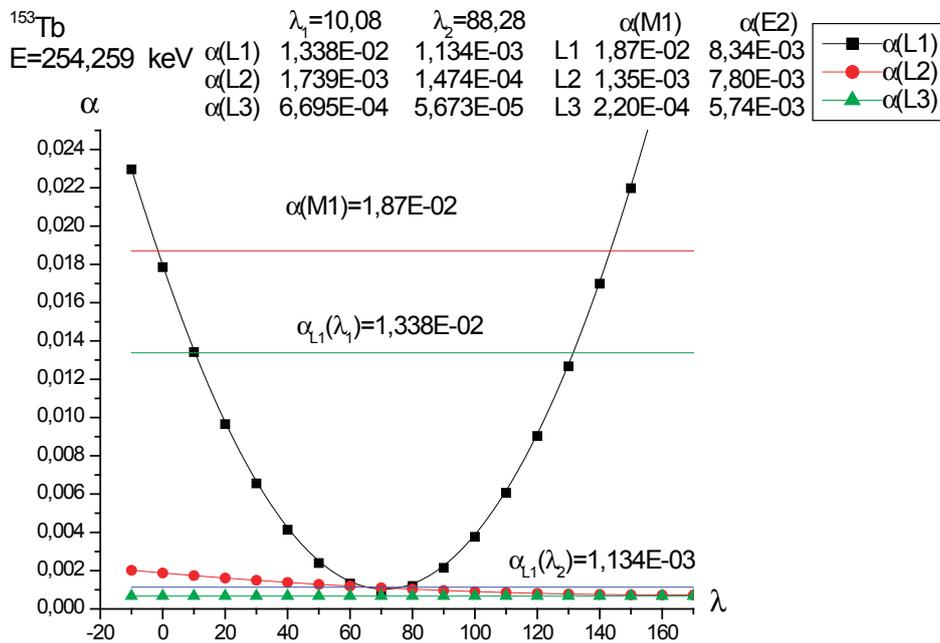


Рис. 2

Таблица 3. Отношения КВК для ядерного параметра.

Yadro	$E_\gamma, keV$	$\frac{\alpha(M1+E2)}{\alpha(M1)} (\lambda = 0)$			$\frac{\alpha(M1+E2)}{\alpha(M1)} (\lambda \neq 0)$		
		L1	L2	L3	L1	L2	L3
153-Tb	254.259	0.93	1.57	3.47	0.72	1.29	3.04

Литература:

1. Абдуразаков, А. А., Вылов Ц., Громов К. Я., Исламов Т. А., Караходжаев А., Кузнецов В. В., Лебедев Н. А., Нгуен Конг Чанг, Оманов Ш. Изв.АН СССР, сер. физ., 1980, 44, с.1798–1841.

# Молодой ученый

Международный научный журнал  
Выходит два раза в месяц

№ 12 (116) / 2016

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**Главный редактор:**

Ахметов И. Г.

**Члены редакционной коллегии:**

Ахметова М. Н.  
Иванова Ю. В.  
Каленский А. В.  
Куташов В. А.  
Лактионов К. С.  
Сараева Н. М.  
Абдрасилов Т. К.  
Авдеюк О. А.  
Айдаров О. Т.  
Алиева Т. И.  
Ахметова В. В.  
Брезгин В. С.  
Данилов О. Е.  
Дёмин А. В.  
Дядюн К. В.  
Желнова К. В.  
Жуйкова Т. П.  
Жураев Х. О.  
Игнатова М. А.  
Калдыбай К. К.  
Кенесов А. А.  
Коварда В. В.  
Комогорцев М. Г.  
Котляров А. В.  
Кузьмина В. М.  
Кучерявенко С. А.  
Лескова Е. В.  
Макеева И. А.  
Матвиенко Е. В.  
Матроскина Т. В.  
Матусевич М. С.  
Мусаева У. А.  
Насимов М. О.  
Паридинова Б. Ж.  
Прончев Г. Б.  
Семахин А. М.  
Сенцов А. Э.  
Сенюшкин Н. С.  
Титова Е. И.  
Ткаченко И. Г.  
Фозилов С. Ф.

Яхина А. С.

Ячинова С. Н.

**Международный редакционный совет:**

Айрян З. Г. (Армения)  
Арошидзе П. Л. (Грузия)  
Атаев З. В. (Россия)  
Ахмеденов К. М. (Казахстан)  
Бидова Б. Б. (Россия)  
Борисов В. В. (Украина)  
Велковска Г. Ц. (Болгария)  
Гайич Т. (Сербия)  
Данатаров А. (Туркменистан)  
Данилов А. М. (Россия)  
Демидов А. А. (Россия)  
Досманбетова З. Р. (Казахстан)  
Ешиев А. М. (Кыргызстан)  
Жолдошев С. Т. (Кыргызстан)  
Игиснинов Н. С. (Казахстан)  
Кадыров К. Б. (Узбекистан)  
Кайгородов И. Б. (Бразилия)  
Каленский А. В. (Россия)  
Козырева О. А. (Россия)  
Колпак Е. П. (Россия)  
Куташов В. А. (Россия)  
Лю Цзюань (Китай)  
Малес Л. В. (Украина)  
Нагервадзе М. А. (Грузия)  
Прокопьев Н. Я. (Россия)  
Прокофьева М. А. (Казахстан)  
Рахматуллин Р. Ю. (Россия)  
Ребезов М. Б. (Россия)  
Сорока Ю. Г. (Украина)  
Узаков Г. Н. (Узбекистан)  
Хоналиев Н. Х. (Таджикистан)  
Хоссейни А. (Иран)  
Шарипов А. К. (Казахстан)

**Руководитель редакционного отдела:** Кайнова Г. А.  
**Ответственные редакторы:** Осянина Е. И., Вейса Л. Н.

**Художник:** Шишков Е. А.

**Верстка:** Бурьянов П. Я., Голубцов М. В.,  
Майер О. В.

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются.

За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы.

Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.

При перепечатке ссылка на журнал обязательна.

Материалы публикуются в авторской редакции.

**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**

**почтовый:** 420126, г. Казань, ул. Амирхана, 10а, а/я 231;

**фактический:** 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.

E-mail: [info@moluch.ru](mailto:info@moluch.ru); <http://www.moluch.ru/>

**Учредитель и издатель:**

ООО «Издательство Молодой ученый»

ISSN 2072-0297

Подписано в печать 10.07.2016. Тираж 500 экз.

Отпечатано в типографии издательства «Молодой ученый», 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, 25